



Titre: Modélisation du problème du contact lors du choc à faible énergie
Title: sur les composites stratifiés en graphite/époxy

Auteur: Mohamed Aboussaleh
Author:

Date: 1998

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Aboussaleh, M. (1998). Modélisation du problème du contact lors du choc à faible
Citation: énergie sur les composites stratifiés en graphite/époxy [Ph.D. thesis, École
Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8534/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/8534/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:**
Advisors:

Programme: Unspecified
Program:

INFORMATION TO USERS

This manuscript has been reproduced from the microfilm master. UMI films the text directly from the original or copy submitted. Thus, some thesis and dissertation copies are in typewriter face, while others may be from any type of computer printer.

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted. Broken or indistinct print, colored or poor quality illustrations and photographs, print bleedthrough, substandard margins, and improper alignment can adversely affect reproduction.

In the unlikely event that the author did not send UMI a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if unauthorized copyright material had to be removed, a note will indicate the deletion.

Oversize materials (e.g., maps, drawings, charts) are reproduced by sectioning the original, beginning at the upper left-hand corner and continuing from left to right in equal sections with small overlaps.

Photographs included in the original manuscript have been reproduced xerographically in this copy. Higher quality 6" x 9" black and white photographic prints are available for any photographs or illustrations appearing in this copy for an additional charge. Contact UMI directly to order.

Bell & Howell Information and Learning
300 North Zeeb Road, Ann Arbor, MI 48106-1346 USA

UMI[®]
800-521-0600

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**MODÉLISATION DU PROBLÈME DU CONTACT
LORS DU CHOC À FAIBLE ÉNERGIE SUR LES
COMPOSITES STRATIFIÉS EN GRAPHITE/ÉPOXY**

**MOHAMED ABOUSSALEH
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

**THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR
GÉNIE MÉCANIQUE
NOVEMBRE 1998**



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-42817-6

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

**MODÉLISATION DU PROBLÈME DU CONTACT
LORS DU CHOC À FAIBLE ÉNERGIE SUR LES
COMPOSITES STRATIFIÉS EN GRAPHITE/EPOXY**

présentée par: ABOUSSALEH Mohamed

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. YELLE Henri, Ph.D., président

M. BOUKHILI Rachid, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. SANSCHAGRIN Bernard, D.Ing., membre

M. KOFFI Demagna, Ph.D., membre

DÉDICACE

A ma famille

A mon amie Min

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de recherche le professeur Rachid Boukhili; sans lui ce travail ne verrait pas le jour. Je le remercie très sincèrement pour sa disponibilité et pour ses idées pertinentes tout au long de ce travail et en particulier pour son sens de relation humaine.

Que le professeur Henri Yelle trouve ici mes remerciements pour avoir dépensé de son temps pour lire et présider le jury de ce travail.

J'exprime aussi mes remerciements aux professeurs Bernard Sanschagrin et Koffi Demagna d'avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin, je n'oublie pas tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

RÉSUMÉ

Les chocs à faible énergie (CFE) induisent des dommages importants dans les structures composites stratifiés. Ces dommages qui sont internes et non détectables par un simple examen de la surface du stratifié peuvent conduire à une dégradation considérable de la rigidité du matériau et d'autant plus lorsque de tels chocs sont répétés. Une analyse locale de l'évolution dans le temps des mécanismes de cet endommagement est très difficile. L'objectif de la présente étude est alors de définir, caractériser et prédire un état du dommage critique (EDC). Cet EDC pourra être utile pour le design des structures composites.

Dans le but de comprendre les mécanismes du dommage, particulièrement sa forme, son étendue et sa nature, une série d'essais quasi-statiques et de chocs est réalisée sur des plaques en graphite/epoxy (AS4/3501-6). L'analyse de l'ensemble des résultats obtenus a permis de dégager les points suivants:

- 1) la réponse du matériau aux chocs à faible énergie peut être déterminée par des essais quasi-statiques,
- 2) les deux chargements présentent une réduction instantanée de la force dans la courbe force-déplacement,
- 3) cet état correspond à une propagation instable du dommage,
- 4) cet état du dommage critique (EDC), peut être lié à des variables globales telles que la force, la rigidité et l'énergie,

5) la forme, l'étendue et la nature du dommage sont semblables dans les deux types de chargements.

Un modèle de calcul des paramètres qui sont liés à l'EDC est proposé dans la présente étude. D'abord, la zone du contact est analysée car celle-ci joue un rôle important dans le problème du choc. L'énergie du choc est transmise à la plaque par la création d'une surface de contact entre l'impacteur et la plaque cible. Ainsi, une force de contact F et une indentation α sont induites dans cette zone de contact. Un modèle de prédiction de la relation entre cette force et l'indentation (F - α) est développé. Dans notre approche, la plaque est de faible épaisseur, (ie: ε_z négligé) faite d'un stratifié symétrique. La méthode utilisée est basée sur la construction de la fonction de Green du problème. Les équations de l'élasticité ont été résolues par approximation par double série de Fourier. La continuité des contraintes de cisaillement interlaminaires est prise en compte. Des résultats expérimentaux ont confirmé la validité de cette approche.

Lors de la simulation, il s'est avéré que seuls le rayon de l'impacteur et l'épaisseur de la plaque affectent la relation (F - α). Par ailleurs, la séquence d'empilement ainsi que les dimensions planes de la plaque ne montrent aucun effet important.

Dans le but de lier l'EDC à l'énergie du choc, un modèle de calcul de la relation entre la force et le déplacement de l'impacteur (F - w_0) est aussi proposé. Les hypothèses considérées sont les mêmes pour les deux cas, (ie: F - α et F - w_0). Une bonne concordance est obtenue entre les prédictions du modèle et les résultats expérimentaux réalisés dans le cadre de ce travail.

L'extrapolation des résultats de ce modèle aux chargements dynamiques (CFE) est traitée. Nous avons montré que l'énergie critique à l'EDC pour une plaque de dimensions planes quelconques, peut être déterminée à partir de la relation $(F-W_0)$ d'une plaque servant de référence. L'existence de certains paramètres associés à l'EDC qui peuvent être considérés comme intrinsèques au matériau est aussi démontrée.

L'effet de certains paramètres: rayon de l'impacteur et les dimensions planes de la plaque sur l'EDC est aussi étudié. Il s'est avéré que l'énergie critique à l'EDC est indépendante du rayon de l'impacteur, par contre, la pression maximale de contact diminue lorsque le rayon augmente. Cela implique un dommage plus important au niveau de la zone de contact pour des impacteurs de faibles rayons. Quant aux dimensions planes, l'effet contraire est observé c'est-à-dire que l'énergie critique à l'EDC augmente avec les dimensions alors que la pression locale de contact est indépendante de celles-ci.

Les équations permettant d'estimer le nombre de chocs à l'EDC à partir de la fatigue conventionnelle (S-N) ont été développées. Cependant, les mécanismes du dommage peuvent être différents dans les deux cas.

ABSTRACT

Significant damage can be induced in composite laminated structures by low velocity impact, (LVI). This damage is internal and cannot be determined simply by examining the surface of the laminate. A large decrease in the global stiffness can result from LVI particularly when these impacts are repeated. A local analysis of the extent of the damage during impact is too difficult to obtain. The objective of the present study is then to define, characterize and predict a critical damage state, (CDS) that can be useful in the design of composite structures.

To understand the mechanisms of the damage, especially its form, size and nature, a series of quasi-static and impact tests is realized on a graphite/epoxy (AS4/3501-6). The analysis of test data allowed to the following remarks:

- 1) the behavior of the laminate under impact can be determined by quasi-static tests,
- 2) the CDS is governed by a drastic drop in the force on the force-displacement curve for both tests,
- 3) this CDS corresponds to a unstable propagation of the damage,
- 4) this CDS can be characterized by global variables such as the force, rigidity and energy,
- 5) the form, size and nature of the damage is similar for quasi-static and impact tests.

A model for predicting some parameters which are linked to the CDS is proposed in the present study. Firstly, the contact zone is analyzed because it plays an important role in the impact problem. The transmission of impact energy to the plate passes by creation of a contact surface between the impactor and the target. A contact force F and an indentation α are induced in this contact zone. A model to predict this relationship (F - α) is proposed. In our approach, the plate is a symmetric laminate and have thin thickness, (ie: ϵ_z neglected). Our approach is based on the construction of the Green function of the problem. Elasticity equations have been solved by an approximation with a double Fourier series. The continuity of interlaminar stress is taken into account. Experimental results have confirmed the validity of this approach.

During the simulation, it is shown that only the radius of the impactor and the thickness of the plate have an effect on the relationship (F - α). The stacking sequence and the planes dimension of the plate show no important effect.

For the purpose to link CDS to impact energy, a model to calculate the relationship between the force and the displacement of the impactor (F - w_0) is proposed. The same assumptions are considered for the two cases, (ie: F - α and F - w_0). Good agreement between the present predictions and test data is obtained.

The extrapolation of results from this model to dynamic loading, (LVI) is studied. It is shown that the critical energy at the CDS for a plate can be determined from the knowledge of the static relationship (F - w_0) of a plate serving as reference. The

existence of some parameters associated to the CDS that can be considered as intrinsic to the material is also demonstrated.

The effect of some parameters, (ie: radius of the impactor and plane dimensions of the plate) on the CDS is also studied. It is proven that the critical energy at the CDS is independent on the radius but the maximal contact pressure decreases when the radius increases. That implies a more important damage on the contact zone when the radius decreases. The opposite effect is observed for the plane dimensions. The critical energy at the CDS increases with plane dimensions while the local contact pressure is not affected.

Equations allowing us to estimate the number of impacts to the CDS from the conventional fatigue (S-N) have been developed. However, mechanisms of the damage can be different in the two cases.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	ix
TABLE DES MATIÈRES	xii
LISTE DES FIGURES	xv
INTRODUCTION	1
Chapitre 1: RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE	6
1.1 Problème du contact	6
1.2 Contraintes et déformations	12
1.2.1 Rappel des notions de base de la MEF	13
1.2.2 Méthodes de résolution	17
1.3 Endommagement et critères de rupture	30
1.4 Conclusion	34
Chapitre 2: OBJECTIFS ET MÉTHODOLOGIE	37
2.1 Objectifs	37
2.2 Approche expérimentale	38
2.2.1 Matériaux et échantillons	38
2.2.2 Machine d'essais quasi-statiques	38

2.2.3 Tour d'impact.....	40
2.2.3 Observation du dommage	41
2.2 Approche théorique	44
Chapitre 3: CORRÉLATION ENTRE LES COMPORTEMENTS STATIQUE	
ET DYNAMIQUE	45
3.1 Essais quasi-statiques	45
3.1.1 Force critique à la propagation instable du dommage	45
3.1.2 Effet des dimensions planes sur la force critique	48
3.1.3 Énergie critique à la propagation instable du dommage	50
3.2 Essais de choc simple	56
3.3 Corrélation entre les chargements quasi-statique et dynamique	59
3.3.1 Force critique à la propagation instable du dommage	59
3.3.2 Énergie critique à la propagation instable du dommage	60
3.3.3 Évolution du dommage	65
Chapitre 4: PROBLÈME DU CONTACT	79
4.1 Réponse globale de la plaque	72
4.2 Construction de la fonction de Green	86
4.3 Formulation du problème de contact	91
4.4 Méthode de résolution	93
4.5 Prédiction et vérifications	98
Chapitre 5: PRÉDICTION DE L'ÉTAT DU DOMMAGE CRITIQUE	114
5.1 Détermination de la force critique	114

5.1.1 Formulation du problème	114
5.1.2 Méthode de résolution	117
5.1.3 Prédiction et vérifications	119
5.2 Extrapolation au choc simple	124
5.2.1 Énergie à l'état du dommage critique	124
5.2.2 Détermination de la durée du choc	130
5.3 Extrapolation aux chocs répétés	135
5.4 Variation des paramètres de contact à l'EDC	137
CONCLUSION	147
BIBLIOGRAPHIE	151

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Schématisation du problème du contact	14
Figure 1.2	Schématisation des conditions de non interférence	18
Figure 1.3	Discrétisation du système comportant les trois régions: (a) Impacteur (b) région des éléments d'interface, (c) pièce cible	24
Figure 2.1	Machine universelle d'essais MTS810	42
Figure 2.2	Tour d'impact	43
Figure 3.1	Courbe force-déplacement, $\phi 50$ et $\phi 76.2$, (impacteur $D = 12.7$ mm)	47
Figure 3.2	Courbe $(F-w_0)$ pour différentes dimensions planes, (impacteur $D = 12.7$ mm)	53
Figure 3.3	Courbe $(E-F)$ pour différentes dimensions, (impacteur $D = 12.7$ mm)	54
Figure 3.4	Courbe $(EK-F)$ pour différentes dimensions planes	55
Figure 3.5	Variation de la force en fonction du temps lors d'un choc simple Impacteur $D = 12.7$ mm, $\phi 50$	57
Figure 3.6	Variation de la force en fonction du déplacement lors d'un choc simple, Impacteur $D = 12.7$ mm	58
Figure 3.7	Comparaison entre les réponses statique et dynamique, Impacteur $D = 12.7$ mm	62
Figure 3.8	Comparaison entre les courbes $(E-F)$ pour les chargements statique dynamique, Impacteur $D = 12.7$ mm	63
Figure 3.9	Mise en évidence des énergies E_a , E_t et E_e	64

Figure 3.10	Réseau du dommage observé: chargement statique à $F > F_C$	68
Figure 3.11	Réseau du dommage observé: partie symétrique de celle montrée à la figure 3.10	69
Figure 3.12	Mise en évidence de rupture de fibres et de fissures droites, $F > F_C$	70
Figure 3.13	Réseau du dommage dans une plaque soumise au chocs répétés au-delà de l'EDC	71
Figure 3.14	Mise en évidence des fissures transverses connectées au délaminage	72
Figure 3.15	Mise en évidence de fissure droite dans un pli à 45°	73
Figure 3.16	Mise en évidence de fissures dans une zone de concentration de résine, interface $45/-45$	74
Figure 3.17	Mise en évidence du délaminage entre fibres et matrice	75
Figure 3.18	Fissure transverse dans un pli à 0° et qui prend fin à l'interface $0/45$ sans délaminage	76
Figure 3.19	Agrandissement de la fissure précédente, extrémité 0°	77
Figure 3.20	Mise en évidence de fissures semblables symétriques aux précédentes	78
Figure 4.1	Géométrie de la pièce et repère choisi	81
Figure 4.2	Illustration des variables du contact, (a) juste avant le contact, (b) après le contact	94
Figure 4.3	Illustration de la surface du contact discrétisée	95
Figure 4.4	Effet du nombre d'éléments de la surface initiale sur la convergence	105

Figure 4.5	Effet du nombre de termes de la série de Fourier sur la convergence	106
Figure 4.6	Comparaison avec les résultats de Hertz	107
Figure 4.7	Comparaison avec les résultats de Tan et al,[16]	108
Figure 4.8	Effet de la séquence d'empilement sur la force de contact, $[0/\theta]_{5s}$, $\theta = 0, 15, \dots, 75, 90$, $D = 12.7$ mm	109
Figure 4.9	Effet de l'épaisseur sur la force de contact, $D = 12.7$ mm	110
Figure 4.10	Schématisation de la variation de la souplesse en fonction de la séquence d'empilement	111
Figure 4.11	Illustration de l'effet de la séquence d'empilement sur la souplesse aux points (x_0, y_0) et (x_{\max}, y_{\max})	112
Figure 4.12	Effet des dimensions planes sur la force de contact	113
Figure 5.1	Illustration des paramètres du contact, (a): juste avant le contact (b): après le contact	120
Figure 5.2	Convergence de la solution en fonction du nombre de termes de la série de Fourier	121
Figure 5.3	Convergence de la solution en fonction du nombre d'éléments de la surface du contact	122
Figure 5.4	Comparaison entre les prédictions du modèle et les résultats expérimentaux	123
Figure 5.5	Variation de la force de contact en fonction du déplacement pour différentes dimensions planes	127

Figure 5.6	Variation de la force de contact en fonction de l'énergie pour différentes dimensions planes	128
Figure 5.7	Variation du paramètre E/ab en fonction de la force de contact	129
Figure 5.8	Variation de la durée du choc en fonction de la rigidité de la plaque, ($m = 3 \text{ Kg}$ et $D = 12.7 \text{ mm}$)	133
Figure 5.9	Variation de la force en fonction du temps	134
Figure 5.10	Variation de la pression maximale p_0 en fonction de la force de contact pour différentes dimensions, $D = 12.7 \text{ mm}$	140
Figure 5.11	Variation de la surface de contact en fonction de la force de contact, $D = 12.7 \text{ mm}$	141
Figure 5.12	Variation de l'indentation α en fonction de l'énergie du choc E , $D = 12.7 \text{ mm}$	142
Figure 5.13	Variation de l'indentation α en fonction de l'énergie normalisée E/ab , $D = 12.7 \text{ mm}$	143
Figure 5.14	Variation de l'indentation α en fonction de la force de contact F , $D = 12.7 \text{ mm}$	144
Figure 5.15	Variation de la pression maximale p_0 en fonction de la force pour deux impacteurs, ($D = 12.7 \text{ mm}$ et $D = 19.1 \text{ mm}$)	145
Figure 5.16	Distribution de la pression de contact à l'EDC, $D = 12.7 \text{ mm}$	146

Introduction

L'intérêt que suscitent actuellement les matériaux composites dépasse le stade de la simple curiosité technique. En effet, les qualités propres à ces matériaux (faible densité, résistance à la corrosion, propriétés mécaniques élevées, etc.) donnent à leur utilisation de sérieux avantages. Leur domaine d'application va des articles de sport à des structures complexes en aéronautique. Pendant que ces matériaux offrent une excellente résistance aux charges statiques, leur capacité d'absorber et dissiper de l'énergie demeure toutefois limitée. En effet, des chocs de faible énergie, (CFE) peuvent cependant causer d'importants dommages et par conséquent compromettre leur stabilité fonctionnelle. Cette situation est encore critique en design si la présence de tels chocs peut être présumée fatale au fonctionnement sécuritaire de la structure ou du système mécanique. Les dommages induits par les CFE sont internes et indétectables par une simple inspection de la surface du stratifié.

Une étude systématique d'un tel dommage peut être divisée en trois domaines distincts : la mécanique des structures, la mécanique de l'endommagement et la

prédiction de la résistance résiduelle. Seule une étude à long terme dans cet ordre apporterait la base mécanistique pour l'évaluation de la tolérance au dommage et au design. Les fondements théoriques des trois domaines cités existent mais leurs applications dans l'étude des composites stratifiés sous choc sont très dispersées par manque de coordination et de consensus. Jusqu'à présent, il n'y a même pas un essai normalisé de base représentatif de l'endommagement des composites sous choc. Les efforts de recherche se sont concentrés sur la quantification de l'étendue des délaminages résultant du CFE et curieusement on a négligé la question fondamentale, soit comment s'initie et progresse le dommage pendant la durée du choc ? Le comment de cette question simple sous-entend l'identification des facteurs qui concourent à la création des microfissures et délaminages, leurs croissances, leurs interactions, leurs importances du point de vue absorption d'énergie et enfin leurs dépendances des conditions géométriques et environnementales. Par conséquent, la réponse à cette question n'est pas évidente car ceci exige un suivi chronologique d'un processus de dommage qui dure au maximum quelques millisecondes et qui en plus se produit à l'intérieur de la structure. Néanmoins, il est possible de définir un état du dommage critique (EDC) utile au design.

Notre objectif global est alors de montrer l'existence d'un tel état du dommage critique et ensuite le prédire par des grandeurs globales telles que la force, la rigidité, l'énergie, etc. Pour ce faire, une analyse du comportement des matériaux composites

soumis au CFE est nécessaire. Une telle analyse peut être divisée en trois étapes :

1. la détermination de la force, la pression et la surface de contact,
2. la détermination des contraintes et des déformations induites par cette pression de contact,
3. l'application de critères de rupture afin de prédire le dommage induit par ces contraintes.

En ce qui a trait à la première étape, à savoir la détermination de la force, la pression et la surface de contact, un nombre de modèles est proposé dans la littérature. D'ailleurs, la première partie du chapitre I présente les principales approches utilisées. Ces approches sont très souvent dérivées de l'hypothèse du demi-espace et/ou de la pression de Hertz, ou ne traitent que des matériaux orthotropes et transversalement isotropes. Quant à la deuxième étape, une détermination analytique des contraintes et des déformations n'est pas encore donnée jusqu'à présent pour des stratifiés à anisotropie générale. Le seul moyen de résoudre le problème est l'utilisation des méthodes numériques telles que la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis. Un grand nombre d'algorithmes est proposé dans la littérature concernant en particulier la méthode des éléments finis. De gros logiciels commerciaux sont maintenant équipés de procédures capables d'étudier les matériaux composites. Malheureusement, ces logiciels sont basés sur la formulation en termes des déplacements et ne peuvent en aucun cas assurer la continuité des contraintes interlaminaires (τ_{xz} , τ_{yz}

et σ_z) qui semblent jouer un rôle important dans le délaminage interlaminaire. Il faut donc procéder par une formulation mixte en termes de contraintes et déplacements ($\sigma - u$) ou à la limite par une formulation hybride dans laquelle les contraintes interlaminaires et les déplacements seront les inconnues de base du problème. L'avantage de cette dernière formulation est qu'elle introduit moins d'inconnues donc permet un gain du temps de compilation sur ordinateur. Le chapitre I traite aussi les principaux travaux accomplis par l'utilisation de la méthode des éléments finis. Concernant la troisième étape, la précision de la prédiction dépend de l'exactitude du champ de contrainte, particulièrement les contraintes interlaminaires d'une part, et de l'efficacité du critère de rupture considéré d'autre part. Les différents critères de rupture seront aussi exposés dans le chapitre I. Une analyse locale du dommage est rendue difficile en raison de la multitude des facteurs agissant sur son étude. Les critères de rupture statique ne semblent pas être applicables dans la prédiction du dommage induit par le choc. La présence des mécanismes d'absorption et de dissipation de l'énergie, qui agissent davantage par voie d'endommagement que, par tout autre processus, initient des champs de concentration de contraintes locaux très complexes. Ces champs se déplacent en fonction de la propagation du dommage et la connaissance d'un état de contraintes en un instant et en un point donnés durant le choc appartient au domaine probabiliste. Cela justifie alors l'importance de la recherche d'un état du dommage critique qui peut être lié directement à des variables globales. Dans le chapitre II, nous

présentons les objectifs spécifiques de cette étude ainsi que la méthodologie d'approche utilisée. Dans le chapitre III, l'étude expérimentale des comportements statique et dynamique ainsi que l'analyse de la zone endommagée par microscope électronique à balayage du stratifié carbone/époxy (AS4/3501-6) seront données. Une grande attention sera particulièrement prêtée à l'état du dommage correspondant à la propagation instable du délaminage. Comme nous l'avons cité précédemment, la détermination de la surface, de la pression et de la force de contact constitue la première étape du problème du choc, puisque l'énergie est transmise à la pièce par l'intermédiaire de cette zone de contact. Le chapitre IV explique notre formulation du problème du contact, la méthode de résolution ainsi que les résultats obtenus. L'analyse de l'effet de certains paramètres importants, (ie : rayon de l'impacteur, géométrie de la pièce, séquence d'empilement, etc.) sur le contact est aussi présentée. Dans le chapitre V, un modèle est proposé pour la prédiction de l'EDC tel qu'il est défini au chapitre III. Cet EDC sera caractérisé par des variables globales telles que l'énergie d'impact, force maximale, etc. Les valeurs de certains paramètres importants à l'EDC sont analysées. Enfin, une conclusion dans laquelle sont récapitulés les résultats obtenus ainsi qu'une perspective des travaux futurs est donnée.

Chapitre 1

Recherche bibliographique

1.1 Problème du contact

Le problème du contact peut être approché de façon analytique ou expérimentale. Plusieurs travaux montrent que la loi qui régit le contact, lors d'un impact à faible énergie, peut être déterminée par des essais quasi-statiques, [1-4]. Les inconvénients de cette méthode sont que la variation d'un paramètre quelconque, (ie : forme de l'impacteur, matériaux, dimension de la pièce, etc.) implique la nécessité de mener à terme d'autres tests. Il s'agit donc d'une procédure longue et coûteuse. Il est donc intéressant de trouver un modèle analytique tenant compte de ces paramètres affectant le problème du contact. Le premier à avoir développé une relation analytique dans le cas des matériaux isotropes homogènes et élastiques fut Hertz en 1881, [5]. Dans sa

résolution, Hertz s'est basé sur les résultats obtenus par Boussinesq, [6] concernant l'application de la méthode des potentiels au problème d'un demi-espace soumis à une charge répartie sur une petite portion de sa surface. Les hypothèses principales de Hertz sont :

1. la surface de contact est une surface quadratique,
2. la pression de contact peut être de la forme : $p = p_o \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$, où p_o est la pression maximale au centre du contact, r est la position du point où p est calculée et a est le rayon de la surface de contact (supposée circulaire).

La fameuse relation à laquelle Hertz est arrivé est la suivante :

$$F = k\alpha^{1.5} \quad (1.1)$$

où F , α et k sont respectivement la force de contact, l'indentation et la constante élastique dépendant des propriétés mécaniques et géométriques des solides en contact. Dans le cas d'une sphère de rayon R avec un plan, la constante k a l'expression suivante :

$$k = \frac{4}{3} \sqrt{R} \left(\frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_p^2}{E_p} \right)^{-1} \quad (1.2)$$

Où E_i , ν_i et E_p , ν_p sont les modules de Young et les coefficients de Poisson de l'impacteur et de la pièce impactée respectivement.

Il est très évident que la relation de Hertz ne peut pas être appliquée directement aux matériaux composites vu l'anisotropie de ceux-ci. En 1956, Conway, [7] avait développé une relation semblable à celle de Hertz ($F = k\alpha^{1.5}$). Dans sa relation la constante k prend la forme suivante :

$$k = \frac{4}{3}\sqrt{R} \frac{\sqrt{G_{rz}}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}{\sqrt{A_{22}}\sqrt{(\sqrt{A_{11}A_{22}} + G_{rz})^2 - (A_{12} + G_{rz})^2}} \quad (1.3)$$

Où A_{11} , A_{12} et A_{22} sont des coefficients liés aux constantes élastiques du matériau : (E_r , E_z , G_{rz} , ν_{rz} et ν_r) qui sont celles qui définissent un matériau transversalement isotrope. Les indices r et z réfèrent aux directions radiale et transverse. L'élaboration de cette relation supposait un demi-espace transversalement isotrope. L'extrapolation de cette relation aux matériaux complètement anisotropes ne semble pas facile. Une très bonne approximation des propriétés mécaniques du stratifié par des valeurs moyennes E_r , E_z , G_{rz} , ν_{rz} et ν_r est nécessaire, en plus des dimensions de la pièce qui sont en réalité finies contrairement à l'hypothèse du demi-espace. Néanmoins, Greszczuk, [8,9] avait utilisé cette relation de Conway avec succès pour lisser ses résultats expérimentaux pour de très faibles indentations. En 1966, Willis, [10] a donné une solution globale dans le cas du demi-espace transversalement isotrope en adoptant les hypothèses de Hertz concernant la surface et la pression de contact. La résolution des équations de l'élasticité a été faite par une approximation par des fonctions harmoniques de Bessel. Le problème de la solution de Willis est qu'elle comporte

des termes à déterminer par intégration numérique ; cela rend sa solution lourde et presque abandonnée.

L'une des relations les plus utilisées est celle introduite par Yang et Sun, en 1982, [11]. La constante k qu'ils proposent a l'avantage d'être très simple à intégrer dans les modèles analytiques ou numériques, [12-14]. Cette relation, souvent appelée dans la littérature la loi de Hertz modifiée, a pour expression, dans le cas d'une plaque impactée par une sphère de rayon R :

$$F = \frac{4}{3}\sqrt{R}\left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1}{E_z}\right)^{-1}\alpha^{1.5} \quad (1.4)$$

Où E , ν et E_z sont respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson de l'impacteur (sphère) et le module transverse du pli orthotrope sous l'impacteur. Dans le cas de faibles indentations, il y a une bonne corrélation entre les prédictions de cette relation et les résultats expérimentaux réalisés par Wu et Shyu, [15]. Une série de tests menée par Tan et al, [16] montrent qu'une relation de type $F = k\alpha^{1.5}$ représente bien les résultats expérimentaux pour de faibles indentations. Ils ont surtout remarqué que l'exposant de (1.5) est très raisonnable ; quant à la constante k , les résultats peuvent diverger de façon importante dépendamment de la géométrie de l'impacteur et l'épaisseur de la plaque, [17]. On peut affirmer concernant tous ces modèles, d'une part, qu'ils ne tiennent pas compte de l'épaisseur de la pièce, pour la simple raison que celle-ci ne figure pas dans leurs relations ($F - \alpha$) malgré que des tests expérimentaux

montrent qu'elle joue un rôle loin d'être négligeable, [18]. D'autre part, les matériaux traités par ces modèles sont transversalement isotropes, la séquence d'empilement n'a aucune signification puisque, pour ces matériaux, les propriétés mécaniques sont constantes dans la direction transverse qui est celle de l'impact.

Une autre solution concernant les matériaux transversalement isotropes et axisymétriques a été donnée par Cairns et Lagace en 1987, [19]. Dans leur approche, ils ont aussi considéré une pression de Hertz et la fonction de contrainte ψ proposée par Lekhnitskii, [20] pour les problèmes de révolution axiale. La résolution du problème a été faite par approximation par des fonctions de Bessel-Fourier. Les prédictions de ce modèle sont en très bon accord avec l'expérience dans le stade des faibles indentations. La comparaison a été possible par approximation des propriétés mécaniques du stratifié par des valeurs moyennes correspondant à un composite transversalement isotrope.

Une autre approche complètement différente a été proposée par Hanson en 1992, [21]. Son approche est basée sur les résultats de Fabrikant, [22] relatifs à la théorie des potentiels. Aucune validation avec des essais expérimentaux n'a été donnée.

L'un des rares modèles qui traite les matériaux orthotropes et quasi-isotropes est celui développé par Wu et Yen en 1994, [23]. La résolution du problème a été faite par la construction d'une fonction exacte de Green en se basant sur la solution exacte développée par Pipes et Pagano, [24] pour les matériaux croisés $[0/90]_s$. Comme pour

les modèles précédents, une très bonne convergence entre les résultats expérimentaux et leurs prédictions pour de faibles indentations est obtenue. On peut affirmer que les modèles précédents ne peuvent être appliqués que dans le cas de faibles indentations. Cela peut être interprété par le fait que pour α très faible, le phénomène du contact est extrêmement localisé et l'hypothèse du demi-espace est vérifiée d'une part, et d'autre part, seul le pli sous l'impact aura à jouer un rôle important dans la réponse de la pièce.

Une autre approche rencontrée dans la littérature est de modéliser le contact par un système masse-ressort, [25]. La complexité de ces modèles dépend des rigidités considérées dans la simulation (ie : rigidité de contact, flexion, cisaillement, etc.). Ces rigidités sont évaluées à partir d'essais expérimentaux. Caprino et al [26], ont utilisé un modèle de masse-ressort à un degré de liberté où la pièce est assimilée à un ressort de raideur K de masse négligeable et l'impacteur, quant à lui, à une masse ponctuelle (m). Évidemment, à partir de ces modèles basés sur masse-ressort, on ne peut pas déterminer ni l'indentation, ni la répartition de la pression de contact. En plus, il est toujours impératif de faire des tests pour déterminer les paramètres du modèle. Ce genre d'approche est plutôt utilisé pour la simulation de la force totale de contact en fonction du temps.

Il est certes évident que, lorsqu'on parle de simulation, la méthode des éléments finis ne peut pas être omise. La formulation du problème du contact par éléments

finis repose sur les points principaux suivants :

1. établissement des conditions de contact permettant la détermination de la force de contact,
2. utilisation d'algorithmes de recherche de contact, (ie : les noeuds entrant en contact),
3. application de méthodes d'intégration numérique dans le temps,
4. développement de procédures d'itération et de convergence.

La connaissance de la force de contact ou de son expression en termes des inconnues de base du problème permettra le calcul de tous les autres paramètres : (déplacement, déformation et contrainte). Le détail relatif à cette approche sera donné dans le paragraphe suivant traitant le problème des contraintes et des déformations.

1.2 Contraintes et déformations

Comme nous l'avons montré dans le paragraphe précédent, une expression explicite de la force de contact n'est possible que dans des hypothèses très simplificatrices. Les hypothèses notamment du demi-espace, d'une variation quadratique de la pression ainsi qu'un champ de contrainte dérivant d'un potentiel ne peuvent être admises dans la réalité des matériaux composites. Même si ces hypothèses sont rejetées et que le problème est abordé dans son cadre général, la solution ne peut être approchée que

pour des géométries simples telles que des plaques rectangulaires ou circulaires avec des conditions aux limites bien particulières comme des appuis simples ou encastées. En plus, l'anisotropie totale ne pourra pas être prise en considération. L'étude analytique du choc est rendue difficile par le fait que la surface, la pression du contact ainsi que les déplacements évoluent dans le temps et constituent des paramètres initialement inconnus à la solution. Par conséquent, la formulation mathématique conduit nécessairement à des systèmes d'équations et d'inéquations non linéaires dont la solution ne peut être obtenue que par des méthodes numériques. L'approche numérique utilisée pour la discrétisation du problème dans l'espace est la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies dans le domaine du temps.

1.2.1 Rappel des notions de base de la MEF

La méthode des éléments finis consiste en la discrétisation du domaine Ω en un nombre de domaines élémentaires V^e appelé élément. Les équations du mouvement du système doivent être ramenées à une forme intégrale pour pouvoir exploiter la propriété de l'intégrale à savoir : $\int_{\Omega} = \sum \int_{V^e}$ qui est la base fondamentale de la méthode des éléments finis. Le problème peut être posé dans sa forme générale comme suit : Soit à déterminer le champ de déplacements, de déformations et de contraintes dans un solide de volume Ω et de frontière Γ soumis à des conditions aux limites et initiales bien connues. La figure 1.1 donne une schématisation du problème dans un

repère cartésien (x, y, z) . L'équation du mouvement du système s'écrit comme suit :

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho u_{i,tt} \quad (1.5)$$

où σ_{ij} est le tenseur de contrainte de Cauchy, ρ est la densité du matériau et b_i sont les forces de volume. La notation tensorielle est utilisée dans cette équation et d'ailleurs elle le sera tout au long de ce chapitre. Cela implique qu'il y a sommation sur l'indice répété et que $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ et $u_{i,tt} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ avec $(i, j = x, y, z)$.

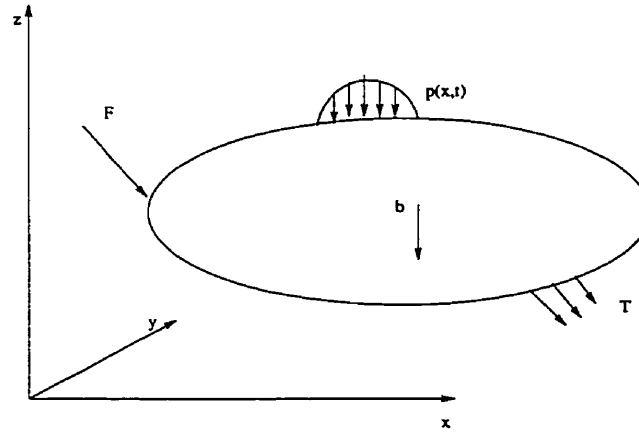


FIG. 1.1: Schématisation du problème de contact

Comme il a été mentionné plus haut, l'équation 1.5 doit être écrite sous une forme intégrale associée. Pour cela, le principe du travail virtuel est généralement utilisé. Pour un déplacement virtuel δu quelconque, le travail des forces extérieures δW est égal au travail interne δU . Cela se traduit en l'absence de forces concentrées, de forces

réparties et de forces de volume par l'équation suivante :

$$\int_{\Gamma_C(t)} (\delta u) p(t) dS - \int_{\Omega} (\delta u) \rho u_{,tt} dV = \int_{\Omega} (\delta \epsilon) \sigma dV \quad (1.6)$$

où $\delta \epsilon$ est la déformation induite par le déplacement virtuel δu et $p(t)$ est la pression de contact. Pour la facilité de la présentation de la méthode, nous donnons la formulation en termes de déplacements. Supposons maintenant que chaque élément est caractérisé par sa forme géométrique ainsi que le nombre de noeuds N^e qui lui sont associés. Les champs des déplacements et des accélérations en un point quelconque de cet élément peuvent être approximés par une interpolation des déplacements u_i^e et des accélérations $u_{i,tt}^e$ aux noeuds, (ie : paramètres nodaux). Soit N cette fonction d'interpolation, on peut alors écrire :

$$u = \sum_{i=1}^{N^e} N_i u_i^e \quad (1.7)$$

$$u_{,tt} = \sum_{i=1}^{N^e} N_i u_{i,tt}^e \quad (1.8)$$

Le déplacement virtuel δu étant quelconque, on peut alors prendre en particulier la fonction d'interpolation N comme ce déplacement ; c'est la méthode de Galerkinge, [27]. En introduisant les notations suivantes : $\epsilon = Su$, $\sigma = D\epsilon$ et $B = SN$, l'équation 1.6 devient alors :

$$\int_{\Gamma_C(t)} N u^e p(t) dS - \int_{\Omega} N^T \rho N u_{tt}^e dV = \int_{\Omega} B^T D B u^e dV \quad (1.9)$$

Posons $K = \int_{\Omega} B^T D B dV = \sum \int_{V^e} B^T D B dV$, $M = \int_{\Omega} N^T \rho N dV = \sum \int_{V^e} N^T \rho N dV$ et $F = \int_{\Gamma_C(t)} N p(t) dS$.

L'équation 1.9 peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$M \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + K U = F \quad (1.10)$$

où U est la matrice globale des déplacements nodaux après assemblage. Lorsque la variation dans le temps de la force F est connue, la résolution de l'équation 1.10 est très simple. Il suffit d'utiliser une procédure d'intégration numérique dans le temps de type différence finie, [28]. Par exemple, l'accélération $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ peut être approximée par la méthode des différences finies centrales comme suit :

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}) \quad (1.11)$$

où Δt est le pas de temps, $U_{j-1} = U(t - \Delta t)$, $U_j = U(t)$ et $U_{j+1} = U(t + \Delta t)$.

Les conditions initiales peuvent être exprimées en termes de vitesse, par conséquent, la vitesse est aussi discrétisée de la même façon, c'est à dire :

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t} (U_{j+1} - U_{j-1}) \quad (1.12)$$

À partir de ces équations et des conditions initiales, la solution est évidente. Ce qui rend le problème très difficile dans le cas de l'impact, c'est que cette force F n'est pas connue ni la surface sur laquelle elle est répartie.

1.2.2 Méthode de résolution

Comme nous l'avons dit précédemment, ce sont les conditions de contact qui rendent délicate la résolution du problème de l'impact tel qu'il est défini par l'équation 1.10. La formulation de ces conditions doit respecter la réalité physique du contact à savoir :

1. la pression de contact doit être négative :

$$p(x_i, t) < 0 \quad \text{si} \quad x_i \in \Gamma_C(t) \quad \text{et} \quad p(t) = 0 \quad \text{sinon} \quad (1.13)$$

2. il ne peut pas y avoir d'interférence entre les surfaces en contact :

$$d(x_i, t) = d(x_i, t_o) - (u_z^P - u_z^I) = 0 \quad \text{si} \quad x_i \in \Gamma_C(t) \quad \text{et} \quad d(x_i, t) > 0 \quad \text{sinon} \quad (1.14)$$

où $d(x_i, t)$ et $d(x_i, t_o)$ désignent les distances aux instants t et t_o entre deux points susceptibles d'entrer en contact. u_z^I et u_z^P sont les incréments des déplacements suivant la direction de l'impact de ces deux mêmes points, voir figure 1.2. Des deux conditions précédentes, on peut tirer la relation suivante généralement utilisée dans les algorithmes de contact : $d(x_i, t)p(x_i, t) = 0$. Cette relation implique que ces deux termes ne peuvent pas être différents de zéro simultanément.

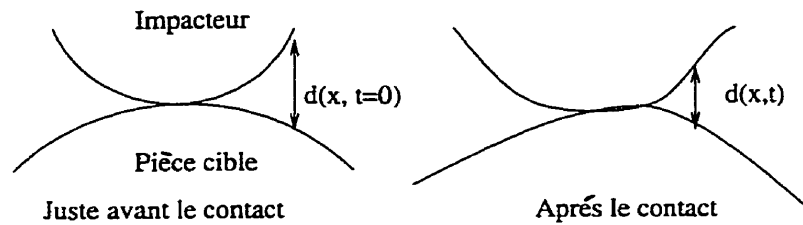


FIG. 1.2: Schématisation des conditions de non interférence

Évidemment, ces conditions physiques doivent être respectées durant toute la période de l'impact. La question qui se pose est comment intégrer ces conditions dans un algorithme d'éléments finis. La façon la plus simple est de remplacer la force de contact répartie par une force concentrée en un point et de la définir par une relation explicite telle que celle proposée par Yang et Sun [11]. Dans ces conditions, le problème de l'impact devient très simple et encore plus, lorsque l'impacteur est supposé rigide. Cette méthode est la plus utilisée dans la littérature, [29-37]. À notre avis, cette approche ne représente pas la réalité du problème pour plusieurs raisons. D'abord et comme nous l'avons déjà cité plus haut, la formulation du problème de l'impact en termes de déplacements n'assure pas la continuité des contraintes interlaminaires, qui sont physiquement continues à l'interface. La relation de Hertz modifiée, proposée par Yang et Sun, [11] peut induire des erreurs jusqu'à 40% sur l'estimation de la force de contact. L'approximation de la force répartie par une force concentrée peut certainement induire des erreurs non négligeables surtout si l'indentation est relative-

ment grande par conséquent la surface de contact doit l'être aussi. Une amélioration de l'approche précédente utilise une relation de type Hertz modifiée (ie : $F = k\alpha^n$), sauf que les constantes k et n sont déterminées expérimentalement, [38]. Des résultats expérimentaux de ces mêmes auteurs montrent une très bonne corrélation avec leurs prédictions. Une autre méthode semblable consiste à assumer une pression de contact uniformément répartie sur une surface initialement supposée, [39-42]. La pression dans cette région prend l'expression suivante : $p(t) = p_o f(t)$ où p_o est supposée connue et $f(t)$ prend la forme suivante :

$$f(t) = \frac{2t}{\tau} \quad \text{si } t < \frac{\tau}{2} \quad f(t) = (1 - \frac{t}{\tau}) \quad \text{si } \frac{\tau}{2} < t < \tau \quad (1.15)$$

où τ est la durée de contact. La durée de contact τ est choisie en se basant sur le temps T nécessaire à la propagation d'une onde longitudinale plane suivant la direction des fibres dans un pli orthotrope à partir de son centre jusqu'à son extrémité. En général τ est supposé être égal à $0.5T$. Cette approche a l'avantage de rendre simple la résolution de l'équation 1.10. Il s'agit d'un problème d'une plaque soumise à une excitation bien déterminée $f(t)$. À l'aide d'une procédure d'intégration dans le temps, la solution est immédiate. Cependant, trois reproches majeurs peuvent être portés à l'égard de cette approche. Elle considère que la durée de l'impact ne dépend que du module et de la longueur suivant la direction des fibres d'un pli orthotrope. En réalité, cette conclusion n'est qu'une approximation puisque la propagation des

ondes dans un stratifié dépend de la rigidité globale de celui-ci, [43]. Donc la séquence d'empilement aura un rôle à jouer dans la durée de l'impact. Le deuxième reproche réside dans le choix de la pression de base p_o . Il n'existe pas de critère menant à un choix de celle-ci. Elle est donc arbitraire, sinon, il faut ramener tous les paramètres calculés à cette pression, (ie : $\frac{\sigma}{p_o}$, $\frac{\epsilon}{p_o}$, etc) et procéder à des essais expérimentaux pour la déterminer. La troisième critique est que la variation dans le temps de la force de contact est linéaire dans cette approche. Or les résultats expérimentaux, [43-45] montrent que la force de contact est plutôt proche d'une variation quadratique ou sinusoidale. Une autre alternative à cette méthode est de considérer une force concentrée et variable avec le temps de façon sinusodale, [46-47]. Cette méthode a l'avantage de se prêter bien à une analyse modale pratiquement intégrée dans tous les gros logiciels commerciaux tel que ABAQUS, [48]. Les méthodes qui traitent les conditions de contact en tenant compte de l'existence d'une répartition de pression de contact initialement inconnue peuvent être divisées en deux principales classes. La première remplace la pression de contact par des forces concentrées appliquées aux noeuds constituant la surface de contact, alors que la seconde, procède par la pression comme paramètre nodal. Dans les deux cas, une procédure itérative est nécessaire et peut être résumée comme suit : Supposons que la solution du problème est connue à un instant t . Cela implique que la surface de contact l'est aussi. Soit $\Gamma_C(t + \Delta t)$ la surface candidate à venir en contact à l'instant $(t + \Delta t)$. Elle peut alors être définie par un

nombre de noeuds d'interpolation qui ne sont pas nécessairement les mêmes que ceux d'interpolation des déplacements. La pression $p(t)$ ou la force $F(t)$ est considérée comme un paramètre nodal. Si la méthode de force concentrée est utilisée, alors, en chacun de ces noeuds, la force est considérée comme une condition aux limites. Dans le cas de pression, celle-ci est supposée être définie en un point quelconque de la surface comme une interpolation des pressions nodales. L'équation 1.10 est alors résolue par une procédure d'intégration numérique. La condition physique du contact (ie : pression négative) est testée. Les points où celle-ci est violée sont écartés et une autre surface $\Gamma_C(t + \Delta t)$ est supposée. La procédure est répétée jusqu'à non-violation de la condition. Quant à la condition de non-pénétrabilité, nous pouvons distinguer quatre principales méthodes permettant de l'intégrer dans l'algorithme de résolution du problème de l'impact : la méthode des éléments d'interface "gap element", la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la méthode des pénalités et enfin la méthode d'optimisation basée sur les outils mathématiques de programmation non linéaire. Avant d'aborder ces différentes méthodes, nous devons signaler que le problème de l'impact tel qu'il est défini par l'équation 1.10 ne tient pas compte de l'aspect non linéaire de celui-ci. Une autre formulation est donc nécessaire. La méthode la plus puissante est d'écrire l'équation du mouvement en termes d'incrément. Pour ce faire, le tenseur des contraintes défini par le deuxième Piolat de Kirchhoff (S) associé au tenseur des déformations de Green-Lagrange (ϵ) est utilisé. Supposons que

le champ de contrainte à l'instant $t = 0$ est connu. Le tenseur de contrainte du second Piolat de Kirchhoff référé à la configuration $t = 0$ est noté tS . Le travail virtuel dû à ces contraintes peut être écrit comme suit :

$$\delta W_S = \int_{\Omega_0} {}^tS \delta^t\epsilon d\Omega \quad (1.16)$$

La linéarisation des contraintes et déformations implique :

$${}^tS = {}^\tau S + S \quad (1.17)$$

$${}^t\epsilon = {}^\tau\epsilon + \epsilon \quad (1.18)$$

où $t = \tau + \Delta t$ avec Δt , l'incrément du temps, S , l'incrément de contrainte et ϵ , l'incrément de déformation. En remplaçant tS et ${}^t\epsilon$ par leurs expressions données par les équations 1.17 et 1.18, on peut écrire le travail δW_S comme suit :

$$\delta W_S = \int_{\Omega_0} ({}^\tau S \delta\epsilon + S \delta\epsilon) d\Omega \quad (1.19)$$

Dans l'équation précédente les termes de degré supérieur sont négligés. En introduisant la loi du comportement dans l'équation 1.19, on peut arriver à :

$$\delta W_S = \int_{\Omega_0} {}^\tau S \delta\epsilon d\Omega + \int_{\Omega_0} D\epsilon \delta\epsilon d\Omega \quad (1.20)$$

La discrétisation de l'équation 1.20 par éléments finis implique de l'écrire pour un élément élémentaire ou tout simplement un élément fini. Dans cet élément de volume V^e , l'équation 1.20 donne :

$$\delta w_S^e = \delta u \left(\int_{V^e} B^T D B d\Omega \right) + \delta u \left(\int_{V^e} B^T \tau S d\Omega \right) \quad (1.21)$$

De même on peut écrire le travail des forces d'inertie δw_I^e comme suit :

$$\delta w_I^e = - \int_{V^e} \rho^t u_{,tt} \delta u d\Omega = - \delta u \left(\int_{V^e} N^T \rho N d\Omega \right)^t u_{,tt} \quad (1.22)$$

Notons à priori le travail de la force de contact par δw_C . Le principe du travail virtuel implique :

$$\sum \delta u \left(\int_{V^e} B^T D B d\Omega \right) + \delta u \left(\int_{V^e} B^T \tau S d\Omega \right) + \sum \delta u \left(\int_{V^e} N^T \rho N d\Omega \right)^t u_{,tt} - \sum \delta w_C = 0 \quad (1.23)$$

La discrétisation de la région de contact dépend de la méthode de résolution utilisée. Dans le cas de la méthode des éléments d'interface "gap element" qui est probablement la plus ancienne, la région du contact est supposée être un milieu continu liant les deux solides à venir en contact. La figure 1.3 montre les trois régions formant le système total à discrétiser.

Une rigidité variable en fonction de la déformation représente la propriété fondamentale d'un élément interface. Avant le contact, l'élément doit avoir une rigidité

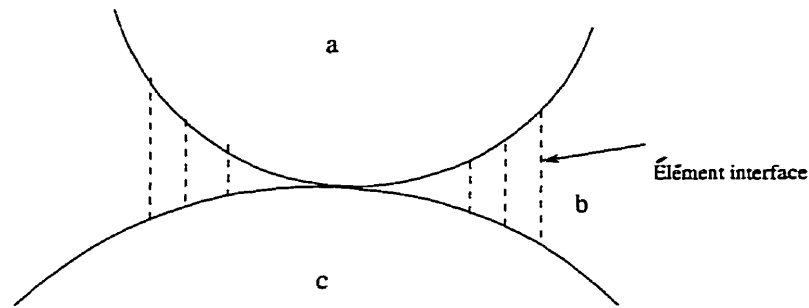


FIG. 1.3: Discrétisation du système comportant les trois régions : (a) Impacteur, (b) région des éléments d'interface, (c) pièce cible

nulle afin de ne pas empêcher le rapprochement entre l'impacteur et la pièce. Lorsque le contact est atteint, cette rigidité doit être suffisamment grande pour éviter l'interférence entre les deux solides, (ie : impacteur et cible). L'implémentation d'une procédure numérique pour ce type d'éléments est loin d'être un problème simple. Il s'agit d'une méthode mathématiquement non rigoureuse basée uniquement sur le bon sens de l'utilisateur. Néanmoins, cette méthode est utilisée avec succès, en particulier dans les problèmes statiques où la résultante de la force de contact est initialement connue. Les prédictions de cette méthode sont en très bon accord avec la théorie de Hertz relative au contact des matériaux isotropes élastiques, [49-55]. Les méthodes des multiplicateurs de Lagrange et des pénalités sont plus rigoureuses, mais nécessitent l'intégration d'une procédure de recherche de la surface de contact. Supposons à priori que la surface de contact à l'instant τ est connue. En utilisant les forces concentrées

aux noeuds de cette surface $\Gamma_C(\tau)$ comme paramètres de base, on peut exprimer la contribution au travail de chaque noeud où la force f est appliquée comme suit :

$$\delta w_c = {}^\tau f (\delta u_z^P - \delta u_z^I) \quad (1.24)$$

où ${}^\tau f$ est la force nodale au noeud considéré. Le travail virtuel total des forces de contact est alors :

$$\delta W_C = \sum_{i=1}^{{}^\tau L} (\delta w_c)_i \quad (1.25)$$

où ${}^\tau L$ est le nombre de noeuds dans la surface de contact à l'instant τ . Dans le cas d'un impacteur rigide, $\delta u_z^I = 0$, l'équation 1.24 devient :

$$\delta w_c = {}^\tau f \delta u_z^P \quad (1.26)$$

Le principe du travail virtuel donne :

$$\sum_{i=1}^{NE} [\delta u k_L u + f_S]_i - \sum_{i=1}^{NE} [\delta u^t f_C]_i + \sum_{i=1}^{NE} [\delta u m^t u_{,tt}]_i = 0 \quad (1.27)$$

où les notations suivantes ont été introduites : $k_L = \int_{V^e} B^T D B d\Omega$ $f_S = \int_{V^e} B^T \tau S d\Omega$ ${}^t f_C = N^T {}^t f$ $m = \int_{V^e} N^T \rho N d\Omega$ et NE est le nombre total d'éléments. En utilisant la méthode standard d'assemblage des éléments finis, on peut transformer l'équation 1.27 comme suit :

$$M^t U_{,tt} + KU = {}^t F_C - {}^r F_S \quad (1.28)$$

où M , K , U et $U_{,tt}$ sont les matrices globales des masses, des rigidités, des incréments de déplacement et des incréments d'accélération du système respectivement. La résolution directe de l'équation précédente est impossible même si les conditions de contact sont bien déterminées puisqu'elle comporte $2N_d$ inconnues à N_d équations. N_d est le nombre de degrés de liberté du système, (ie : N_d inconnues en terme de déplacement nodal et N_d inconnues en terme d'accélération nodale). Plusieurs algorithmes d'intégration dans le temps sont donnés dans la littérature afin de surmonter la difficulté précédente, [28]. Nous présentons ici l'algorithme de Newmark le plus souvent utilisé et qui est défini comme suit :

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t v(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 [(1 - 2\beta)a(t) + 2\beta a(t)] \quad (1.29)$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta t [(1 - \gamma)a(t) + a(t)] \quad (1.30)$$

où u , v et a sont le déplacement, la vitesse et l'accélération et β , γ sont des paramètres à déterminer en fonction de l'application. Les valeurs de β et γ telles que : $0.5 < \gamma < 2\beta$ impliquent un algorithme inconditionnellement stable pour un pas de temps Δt quelconque, [55-58]. À partir des équations 1.29 et 1.30, l'équation 1.28 peut être écrite sous la forme suivante :

$$K^*U = F_S^* + {}^tF_C \quad (1.31)$$

où K^* et F^* sont respectivement la matrice de rigidité et la force globale apparente définie comme suit :

$$K^* = \frac{M}{\beta(\Delta t)^2} + K \quad (1.32)$$

$$F_S^* = {}^tF_S + \frac{M{}^tU_{,t} + 0.5\Delta t(1 - 2\beta){}^tU_{,tt}}{\beta\Delta t} \quad (1.33)$$

L'expression de la condition cinématique de non-interférence, (ie :équation 1.14) en terme de déplacements nodaux de la surface de contact donne :

$${}^tD = NU + {}^\tau D = 0 \quad (1.34)$$

où tD et ${}^\tau D$ sont les matrices globales des distances aux instants τ et $t = \tau + \Delta t$ entre les points qui doivent venir en contact. $D = 0$ implique que les points sont en contact. La méthode des multiplicateurs de Lagrange ou la méthode des pénalités consistent à résoudre l'équation 1.31 sous la contrainte définie par l'équation 1.34. Dans les deux méthodes, la contrainte renforcée est la condition cinématique de non-interférence. La condition mécanique de pression négative est testée à chaque itération jusqu'à convergence de la solution. La méthode des multiplicateurs de Lagrange a été utilisée avec succès dans le cas des matériaux isotropes, [59-66]. C'est la méthode

généralement utilisée dans de gros logiciels commerciaux tel que ADINA, [67]. Par rapport à la méthode des pénalités, celle-ci renforce de façon exacte la condition de non-interférence, mais elle augmente le nombre des inconnues du système par introduction des coefficients de Lagrange. La méthode des pénalités a aussi fait ses preuves dans le cas des matériaux isotropes, [62-71]. Cette méthode est intégrée dans de gros logiciels commerciaux tel que NASTRAN, [72]. Il est possible de combiner ces deux méthodes pour renforcer la condition du contact. Cette méthode appelée les multiplicateurs de Lagrange augmenté est utilisée par certains auteurs, [72-74]. Le traitement direct de la condition cinématique est rendu possible par l'utilisation des outils mathématiques. Cette approche est basée sur la programmation non linéaire, [74-76]. Cette dernière doit être associée à un programme d'éléments finis pour la discrétisation du problème. Notons que jusqu'à maintenant, la surface de contact est supposée être connue à l'instant t , et elle sert de base à la détermination de la solution à l'instant $t + \Delta t$. La question qui se pose est comment incrémenter la surface depuis sa valeur initialement nulle jusqu'à sa valeur maximale qui correspond à la fin du chargement. Pour ce faire, la procédure utilisée est basée sur la méthode d'essais et erreur. Donc il faut développer une technique permettant de construire étape par étape la surface de contact. Supposons que cette surface est connue à l'instant t , donc la solution du problème est connue aussi. Par conséquent, la position de chaque noeud de la surface de contact est connue ainsi que celle de tous les noeuds

avoisinants. La procédure consiste à supposer un certain nombre de noeuds comme potentiellement candidats à venir en contact à l'instant $t + \Delta t$. Le critère du choix de ces noeuds candidats est basé sur leurs positions à l'instant t . Par exemple, si on considère une distance critique D_c , alors les noeuds qui seront probablement en contact à l'instant $t + \Delta t$ doivent être à une distance D telle que $D < D_c$. La surface à l'instant $t + \Delta t$ est alors bien déterminée. Le problème est alors résolu. Les conditions physiques du contact sont alors testées. Les points où celles-ci sont violées seront écartés. Un autre ensemble de points est sélectionné et la méthode itérative est répétée jusqu'à convergence de la solution. C'est la technique commune utilisée dans le problème de l'incrément de la surface. Ce qui diffère d'un auteur à l'autre est comment est approché le contact entre l'impacteur et la pièce cible. La progression du contact noeud par noeud est la méthode la plus simple à implémenter dans un algorithme d'éléments finis. Cependant cette approche n'est valable que dans le cas de très faibles indentations, [74]. Dans le cas du contact bidimensionnel, l'approche noeud par segment est plus adéquate, [70-74]. Le cas le plus général est de considérer le contact noeud par surface, [74, 77]. Cette dernière méthode a l'avantage d'être valable pour n'importe quelle géométrie et aussi dans le cas de très grandes déformations et très grandes rotations.

1.3 Endommagement et critères de rupture

Le dommage le plus à craindre dans les matériaux composites soumis à l'impact à faible énergie est le délaminage interlaminaire associé à des fissures transverses dans la matrice. Son étendue et sa distribution dépendent des propriétés mécaniques et géométriques de la plaque. Ce caractère peut s'expliquer par la capacité d'absorption de l'énergie par déformation élastique, [78]. Dans le cas des plaques minces, il a été observé, que le délaminage interlaminaire est distribué partant du point d'impact vers les extrémités de la pièce. La distribution est généralement caractérisée par une forme tronconique ayant sa base dans le pli inférieur soumis à la tension, tandis que, pour les plaques épaisses, le dommage est plus important au niveau des interfaces centrales et se distribue de façon rétrograde de part et d'autre vers les surfaces externes, [79]. Ces mêmes observations ont été retrouvées par d'autres auteurs, [80-82]. Dans le cas des plaques minces, les contraintes de flexion sont plus dominantes que celle de cisaillement interlaminaire; par conséquent, le dommage sera plus important dans la partie inférieure de la plaque soumise à la tension. Alors que, pour les plaques épaisses, la réponse est plutôt dominée par les contraintes de cisaillement qui sont plus importantes au plan central de la plaque. Le délaminage est observé se propager suivant la direction des fibres du pli inférieur de l'interface considérée, alors que le pli supérieur (ie : pli du côté de l'impact) semble contrôler sa largeur. En d'autres termes, l'aire du délaminage est d'autant plus grande quand la différence

d'orientation des plis adjacents l'est aussi, [83,84]. Cela peut être attribué au fait que les contraintes interlaminaires augmentent avec l'augmentation de la différence d'orientation entre les plis adjacents. D'autres études, [85,86] montrent que l'aire du dommage varie linéairement avec l'énergie d'impact. L'énergie minimale à l'initiation dépend non seulement des propriétés mécaniques du matériau, mais aussi de son épaisseur ainsi que de la séquence d'empilement. Cela nous semble absolument logique puisque l'état de contrainte dépend de ces mêmes paramètres. Comme il a été mentionné plus haut, le délaminage est associé aux fissures transverses dans la matrice. Bon nombre d'études, [87-88] supposent à priori que les fissures constituent le premier mode d'endommagement. Dans d'autres cas [83,84], ce mode est considéré comme précurseur du délaminage. Une série de tests du choc répété a été réalisée par Boukhili et al, [88] pour analyser l'évolution du dommage. Dans leur travail, ils ont démontré que les fissures transverses se manifestent bien avant le délaminage. Le niveau d'énergie de choc provoquant leur initiation est constaté être bien inférieur au niveau d'énergie requis pour faire propager le délaminage. Dans cette même étude, la densité de fissuration atteint un état de saturation et se stabilise, (ie : stade I). Si l'énergie de l'impact augmente, il y a déclenchement du mécanisme du délaminage, (ie : stade II). Ces mêmes résultats sont partiellement confirmés par Wang et al, [89]. Srait et al, [90], rapportent dans leur étude que l'ensemble des rigidités du matériau gouverne la géométrie globale du dommage, alors que la séquence d'empilement local

près d'une interface détermine la forme du délaminage dans celle-ci. Ils affirment aussi que la séquence d'empilement est pratiquement sans effet sur l'énergie d'initiation du dommage, alors que l'énergie à la force maximale en dépend beaucoup. La question qui se pose maintenant est de savoir s'il est possible de prédire cet endommagement assez complexe. Les modèles capables de prédire adéquatement ce dommage sont très rares. Néanmoins, lors d'un impact à faible énergie, au-delà d'un certain état du dommage, le délaminage devient le mode prédominant. Plusieurs modèles ont été élaborés pour prédire l'étendue de ce délaminage responsable d'une chute importante dans la force de contact à sa propagation. Dans le stade de l'initiation, les critères habituels (ie : critères quadratiques) sont utilisés. Lorsque le champ de contraintes est déterminé de façon précise, les prédictions sont en général très raisonnables, [91, 92]. Vu le rôle que joue le délaminage dans la résistance résiduelle des matériaux composites, différents critères spécifiques à celui-ci sont développés. Ces critères sont très souvent des simplifications des critères quadratiques pour ne mettre en équations que des contraintes "responsables" du délaminage interlaminaire, (ie : σ_y , τ_{xz} , τ_{yz} et σ_z). Par exemple, Choi et Chang [93], proposent le critère suivant pour prédire le délaminage interlaminaire :

$$D_a = \left[\left(\frac{{}^n\sigma_{yz}}{{}^nS_i} \right)^2 + \left(\frac{{}^{n+1}\sigma_{xz}}{{}^{n+1}S_i} \right)^2 + \left(\frac{{}^{n+1}\sigma_y}{{}^{n+1}Y_i} \right)^2 \right] = e_D^2 \quad (1.35)$$

où D_a est une constante empirique du matériau et les exposants n et $n+1$ réfèrent

aux plis adjacents dont le délaminage est prédit à leur interface. Le dommage survient lorsque la valeur de e_D atteint l'unité. Une étude expérimentale réalisée par ces mêmes auteurs montre une corrélation satisfaisante entre les prédictions et les observations expérimentales. Ce critère est aussi appliqué par Hong et al, [94] et il s'est avéré qu'il prédit bien le délaminage. D'autres formes d'écriture de ce type de critère peuvent être trouvées dans les travaux de Abrate, [94, 95]. Le problème le plus difficile est la prédiction de l'évolution du dommage. Les critères de rupture statique utilisés dans plusieurs cas ne semblent pas faire preuve de leur usage. La dépendance des déformations et des contraintes du temps est ignorée par ce genre de modèles. Dans une étude menée par Echaabi et Trochu [96], ils montrent qu'il est possible de trouver un meilleur ajustement des points expérimentaux par utilisation de la méthode du Krigeage. Cela permet de donner des expressions plus adaptées aux critères quadratiques. Dans un chargement dynamique, en réalité, il existe une redistribution des contraintes et des déformations dans le temps à cause de l'initiation et la propagation du dommage qui conduisent à des concentrations de contraintes aux bouts des fissures. Or, dans la prédiction de l'évolution du dommage, il est fondamental de connaître le mode de rupture afin de pouvoir faire progresser la fissure. Malheureusement les critères quadratiques très souvent utilisés ne peuvent pas prévoir le mode de rupture. Néanmoins, comme nous l'avons dit précédemment, lorsque le délaminage prédomine, l'application des méthodes de la mécanique de la rupture permet d'aboutir

à des résultats acceptables. Liu et al [97-98], ont utilisé un critère de rupture spécifique au délaminage pour prédire son initiation et une propagation en mode mixte pour prédire son évolution. On peut conclure que la prédiction avec précision de l'évolution du dommage lors des chargements dynamiques est loin d'être résolue.

1.4 Conclusion

Comme il a été mentionné dans les sections précédentes, quelque soit la méthode utilisée pour aborder le problème du choc, il est impératif de résoudre en parallèle le problème du contact. Il existe trois méthodes : analytiques, semi-analytiques et numériques pour résoudre le problème du contact. Toutes les solutions analytiques qui aboutissent à des relations explicites entre les paramètres du contact, ne sont possibles que dans les hypothèses du demi-espace, d'un matériau orthotrope ou transversalement isotrope et de la pression de Hertz. Les deux dernières hypothèses concernent le problème du choix du matériau ; par contre la première, la pièce ne peut être assimilée à un demi-espace que lorsque celle-ci est très massive ; en d'autres termes, elle doit avoir une rigidité globale "infinie". Nous pouvons donc conclure que les modèles conduisant à des relations explicites ne peuvent pas être utilisés dans des structures composites souvent sous forme de plaques de dimensions finies.

Les approches numériques, essentiellement la méthode des éléments finis, ont l'avantage de n'avoir aucune limite quant à la géométrie et le degré d'anisotropie du

matériau. Il est cependant très intéressant de disposer des procédures efficaces pour la formulation des conditions du contact. Le problème de la discontinuité des contraintes interlaminaires ne peut être surmonté que par l'utilisation d'une formulation mixte ou hybride. Cela implique l'élaboration d'un programme d'éléments finis puisque la formulation en termes des déplacements est la seule utilisée dans tous les logiciels commerciaux.

Les résultats des modèles semi-analytiques dépendent des hypothèses et des approximations considérées. Lorsque les méthodes des potentiels ou de fonctions de contraintes sont utilisées, l'hypothèse du matériau transversalement isotrope s'impose pour pouvoir résoudre le problème. Par conséquent l'application de ces modèles est limitée à des matériaux spécifiques. L'autre alternative des modèles semi-analytiques est basée sur la construction de la fonction de Green du problème. Les hypothèses du matériau orthotrope ou transversalement isotrope sont toujours considérées par les modèles proposés dans la littérature. Il est alors nécessaire de trouver un modèle capable de tenir compte de l'anisotropie et des dimensions de la pièce. Pour ce qui est relatif à l'étude de l'endommagement, cela nécessite une analyse dynamique tridimensionnelle des contraintes par la méthode des éléments finis. Il en résulte des coûts très élevés. Les modèles proposés dans la littérature se limitent souvent à des stratifiés à une ou deux interfaces, sinon il faut admettre l'hypothèse des contraintes planes et par la suite estimer les contraintes interlaminaires à partir des équations d'équilibre.

Nous pouvons conclure qu'il n'existe pas de modèle général capable de prédire le dommage durant la durée du choc. Par contre et comme nous l'avons déjà signalé, on peut définir un état du dommage critique, ensuite le prédire par des variables globales. Le chapitre suivant explique les objectifs de cette étude ainsi que la méthodologie utilisée pour les atteindre.

Chapitre 2

Objectifs et méthodologie

2.1 Objectifs

Les objectifs de la présente étude sont :

1. définir un état du dommage critique EDC utile au design pour les chargements quasi-statique et du choc à faible énergie CFE,
2. comparer les deux comportements quasi-statique et au CFE,
3. caractériser l'EDC par des variables globales et déterminer les propriétés intrinsèques au matériau associées à l'EDC,
4. prédire l'EDC d'une plaque de dimension quelconque à partir d'une plaque servant de référence,
5. étudier l'effet de certains paramètres sur l'EDC, en particulier le rayon de l'im-

pacteur, les dimensions de la pièce, et la séquence d'empilement.

2.2 Approche expérimentale

2.2.1 Matériaux et échantillons

Le matériau testé est un stratifié fabriqué à partir de préimprégné de carbone/époxy (AS4/3501-6) provenant de la compagnie Hercules. Le matériau est fourni par la "Defence Research Establishment Pacific" (DREP Victoria) sous forme de plaques de $300 \times 300 \text{ mm}^2$ contenant 36 plis. La séquence d'empilement est la suivante : $[+45_2 / -45_2 / 90_2 / 0_2 / \pm 45 / 0_2 / \pm 45_2 / 0_2]_s$. Ce matériau a été choisi pour son utilisation réelle dans les structures qui sont soumises aux chocs à faible énergie, souvent de façon répétés. Ce matériau est en particulier utilisé dans certaines composantes de l'avion de combat CF-18.

Les propriétés mécaniques d'un pli orthotrope sont :

$$E_L = 116 \text{ GPa} \quad E_T = 6.7 \text{ GPa} \quad G_{LT} = 5.4 \text{ GPa} \quad \nu_{LT} = 0.3$$

$$X^+ = 1860 \text{ MPa} \quad X^- = 1590 \text{ MPa} \quad Y^+ = 57 \text{ MPa}$$

$$Y^- = 207 \text{ MPa} \quad S = 60 \text{ MPa}$$

où E_L , E_T , G_{LT} et ν_{LT} sont respectivement le module longitudinal, transversal, de cisaillement plan et le coefficient de Poisson majeur. X^+ et X^- sont respectivement la résistance à la rupture longitudinale en traction et en compression. Y^+ et Y^- sont

respectivement la résistance à la rupture transverse en traction et en compression et finalement S est la résistance à la rupture en cisaillement plan.

Les plaques ont été découpées à l'aide d'une scie circulaire munie d'une meule abrasive refroidie à l'eau afin de minimiser les dommages au niveau des bords. Ces dommages peuvent se propager vers l'intérieur de l'éprouvette lors de la sollicitation et réduire ainsi sa résistance particulièrement lorsque les bords sont libres. Les dimensions des surfaces exposées des éprouvettes testées sont en mm : $\phi 50$, $\phi 76.2$, 127×127 et 178×178 .

2.2.2 Machine d'essais quasi-statique

La machine utilisée pour réaliser les essais quasi-statiques est une machine servo-hydraulique (MTS810), figure 2.1. Elle est équipée d'un logiciel (TESTSTAR) permettant l'acquisition de données nécessaire à l'analyse des résultats. Le déplacement ainsi que la force sont mesurés pendant le test. L'énergie transmise à l'éprouvette au cours de l'essai est calculée par intégration de la courbe de variation de la force en fonction du déplacement, $(F - w_0)$. Pour chaque niveau de charge, un minimum de cinq éprouvettes est testé. La courbe moyenne est déterminée par l'ajustement des données par la méthode des moindres carrés. Des essais préliminaires ont été effectués pour fixer des paramètres de base servant à mener par la suite les essais dans les mêmes conditions. Ces paramètres sont essentiellement la force et le déplacement,

à la "rupture". Par rupture, on entend l'état de propagation instable du dommage. Il correspond dans la courbe $(F - w_0)$ à la première chute importante de la charge. Cette chute est de l'ordre de 30% de la charge maximale atteinte. Les essais ont été effectués en mode de contrôle du déplacement appliqué à une vitesse constante de 2 mm/mn . Le critère d'arrêt de l'essai est défini par une chute de 20% dans la charge. Les deux conditions aux limites correspondant aux appuis simples et l'encastrement des quatre bords de la plaque sont considérées.

2.2.3 Tour d'impact

Les essais de choc, (ie : essais à énergie contrôlée) sont réalisés sur une tour d'impact de modèle GRC8250 fabriquée par Dynatup, figure 2.2. La machine permet de laisser tomber une masse à une hauteur donnée. La variation de la hauteur de chute permet de faire varier la vitesse de 0.6 à 3.6 m/s . La variation de la vitesse et de la masse de l'impacteur permettent d'avoir une plage d'énergie allant de 0.65 à 302 J . Un photodétecteur situé à la base de la machine permet de mesurer la vitesse de l'impacteur juste avant le contact et de déclencher l'acquisition de données. Le traitement de ces données est effectué par le programme GRC830-I développé par Dynatup. Les grandeurs mesurées directement sont la force, le temps, la vitesse juste avant l'impact et la vitesse lorsque la plaque revient à sa position initiale. Tous les autres paramètres (ie : déplacement, énergie, etc) sont déterminés par manipulation mathématique de la

courbe *force – temps* et de l'équation du mouvement de l'impacteur supposé rigide. L'impacteur est fixé à la cellule de charge. C'est un cylindre en acier très dur pourvu d'un nez hémisphérique de 12.7 mm de diamètre. Lors des essais du choc, une partie de l'énergie est absorbée par le montage. La machine d'impact doit alors être calibrée afin d'éviter une surestimation de l'énergie transmise à l'échantillon. Des essais de choc sont effectués sur différents matériaux ayant des comportements parfaitement élastiques. L'énergie absorbée par la plaque est ainsi totalement restituée. On peut alors déduire l'énergie absorbée par le montage. Cette énergie de l'ordre de 12% de l'énergie du choc sera considérée pour les essais sur les plaques en composite étudiées.

2.2.4 Observation du dommage

Le microscope électronique à balayage (MEB) est utilisé pour l'observation du dommage induit par les chargements quasi-statiques et dynamiques, (ie : choc). Les échantillons sont d'abord préparés selon une procédure recommandée pour le polissage des matériaux composites à matrice polymère. Il est à noter que la qualité du polissage joue un rôle important pour l'efficacité des observations et surtout pour la fidélité des conclusions tirées quant à la nature et l'étendue du dommage. Le matériau est hétérogène constitué de fibres de carbone très dures et de matrice organique relativement tendre. Un polissage très fort induit des zones creuses correspondant à l'arrachement de la résine par le produit abrasif. Ces zones risquent d'être confondues

à des fissures en particulier aux interfaces essentiellement formées de la résine. Avant l'observation au MEB, les échantillons sont d'abord observés au microscope optique à différents agrandissements. Les zones présentant un intérêt sont ensuite analysées au MEB.



FIG. 2.1: Machine universelle d'essais MTS810



FIG. 2.2: Tour d'impact

2.3 Approche théorique

La méthode utilisée pour aborder le problème est basée sur la réponse globale de la plaque combinée aux conditions locales du contact. La réponse globale de la plaque est obtenue par la résolution des équations de l'élasticité d'ordre supérieur des matériaux anisotropes. Les hypothèses relatives aux contraintes et déplacements sont que le déplacement w_z ne varie pas à travers l'épaisseur de la plaque et que les contraintes de cisaillement interlaminaires τ_{xz} et τ_{yz} varient à travers l'épaisseur selon des lois spécifiques imposées. La fonction de Green liant la pression de contact p au déplacement transverse w_z est alors construite en utilisant l'approximation par doubles séries de Fourier. Les conditions du contact sont ensuite associées à cette fonction de Green. Une procédure numérique basée sur la minimisation de l'erreur quadratique est utilisée. Un programme en langage C^{++} est élaboré pour résoudre le système d'équations algébriques obtenu. Le programme utilise la méthode dite "Syngular Value Decomposition", SVD.

Chapitre 3

CORRÉLATION ENTRE LES COMPORTEMENTS STATIQUE ET DYNAMIQUE

3.1 Essais quasi-statiques

3.1.1 Force critique à la propagation instable du dommage

Lors des essais quasi-statiques, une réduction instantanée de la charge est observée lorsque celle-ci atteint une certaine valeur critique. La figure 3.1 reflète clairement cette transition importante dans la courbe de variation de la force de contact F et le déplacement w_0 de l'impacteur, $(F - w_0)$ pour deux plaques de dimensions différentes. Les dimensions de ces éprouvettes sont $100 \times 100 \text{ mm}^2$ et $76.2 \times 76.2 \text{ mm}^2$. Les surfaces exposées sont circulaires de diamètre respectif $\phi 76.2$ et $\phi 50$. Les conditions aux limites sont celles d'une plaque circulaire complètement encastree à ses bords. L'impacteur a

un profil sphérique de diamètre $D = 12.7 \text{ mm}$ et supposé rigide, (ie : acier très dur). La figure 3.1 montre aussi qu'après cette transition, le matériau continue toujours à supporter la charge appliquée mais avec une rigidité plus faible. Cette transition implique bien une dégradation de la rigidité globale du matériau, ($K'_0 < K_0$). Il en résulte alors une dissipation d'une partie de l'énergie interne de la pièce servant ainsi à "créer" et à propager de façon instable le dommage. On considère pour la suite cet état du dommage comme un état du dommage critique abrégé par (EDC). À ce stade, la pièce est sévèrement endommagée et une décision relative à sa mise hors service s'impose, particulièrement, si les charges en service sont dynamiques. La force maximale à l'EDC demeure constante pour les deux dimensions précédentes. La valeur de cette force critique pour le stratifié étudié est de l'ordre de $F_C = 5.5 \text{ KN}$. Dans le but de confirmer la constance de cette force critique F_C , une série d'essais quasi-statiques est alors réalisée sur d'autres dimensions pour une autre condition aux limites correspondante à des plaques rectangulaires simplement appuyées à leurs bords. Le paragraphe suivant présente les résultats obtenus relativement à cet effet.

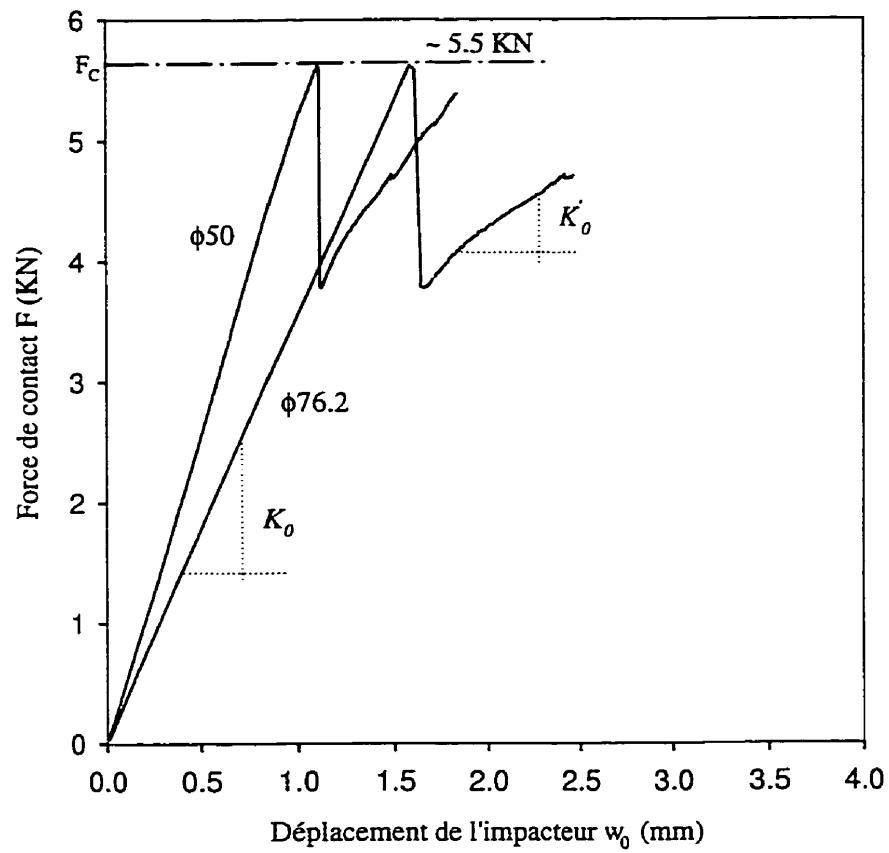


FIG. 3.1: Courbe force-déplacement, $\phi 50$ et $\phi 76.2$ (impacteur $D = 12.7$ mm)

3.1.2 Effet des dimensions planes sur la force F_C

Lors des essais quasi-statiques, il s'est avéré que la force critique F_C est constante et indépendante des dimensions planes de la plaque. La figure 3.2 illustre bien cette conclusion obtenue pour quatre dimensions planes et deux types de conditions aux limites. Les plaques circulaires sont encastées à leur bord tandis que les plaques carrées sont simplement appuyées aux bords.

Ce résultat semble à première vue non trivial. Cependant, une analogie avec des essais de traction simple sur des poutres de différentes longueur et de même section droite constante, montre aussi que la charge maximale à la rupture reste constante alors que le déplacement à la rupture varie avec la longueur. De même dans le cas des plaques testées, le déplacement w_{0C} correspondant à la force F_C varie avec les dimensions planes. Il en résulte évidemment une variation de l'énergie totale en fonction des dimensions planes de la pièce à cet EDC. Cette analogie entre la plaque et la poutre a pour but de démontrer que la force critique F_C peut être considérée comme une propriété du matériau et que l'EDC est une limite entre deux états d'équilibre stable distincts. Prenons le cas d'une poutre faite en un matériau isotrope fragile et linéaire. La rupture dans ce cas est fragile et les courbes $(F - \delta)$ pour différentes longueurs sont semblables à $(F - w_0)$ données sur la figure 3.2.

Lors d'un essai de traction simple sur une poutre, la force est donnée par la relation suivante :

$$F = \frac{ES}{l}\delta = K\delta \quad (3.1)$$

où E , l , S et δ sont respectivement, le module de Young, la longueur, la surface de la section droite et le déplacement de la poutre.

K peut être interprété comme la rigidité globale de la poutre.

On voit clairement que cette rigidité K , (ie : $K = \frac{ES}{l}$) diminue lorsque la longueur augmente. La figure 3.2 montre un comportement linéaire pour la variation de la force de contact en fonction de la déflexion de la plaque. Il est très clair que la pente de ces différentes droites diminue lorsque la surface plane augmente. Or à la rupture, la force $F_{rupture}$ est donnée dans le cas d'une poutre par la relation suivante :

$$F_{rupture} = \sigma_u S \quad (3.2)$$

où σ_u est la contrainte ultime du matériau indépendante de la longueur de la poutre. Comme la surface S est constante, on en déduit facilement que la force à la rupture $F_{rupture}$ est constante et indépendante de la longueur l . Le rôle que joue la longueur l dans le cas des poutres est exactement le même que celui que joue la dimension plane pour une plaque. Nous pouvons donc affirmer que la force critique F_C est une propriété du matériau et que l'état du dommage critique (EDC) est un état limite défini par la force critique F_C et ce pour des chargements transverses quasi-statiques des plaques. Nous reviendrons à ce point dans les pages suivantes.

Il est certes évident que le champ des contraintes est plus complexe dans le cas d'une plaque, contrairement à la poutre soumise à la traction pure où la rupture est facilement déterminée par la contrainte de tension. À l'EDC dans une plaque, ce qui est certain est que les contraintes doivent tout de même vérifier un critère de rupture.

3.1.3 Énergie critique à l'EDC

L'énergie transmise à la plaque peut être déterminée facilement par l'intégration des courbes $(F - w_0)$ données dans la figure 3.2. Cela permet de tracer la variation de cette énergie en fonction de la force ou du déplacement. La figure 3.3 montre la relation force-énergie pour différentes dimensions planes. On voit clairement que l'énergie augmente avec les dimensions planes. Il en résulte de même pour l'énergie critique à l'EDC puisque la force est constante. Dans la figure 3.3, l'énergie E est définie comme suit :

$$E = \int_0^w F dw \quad (3.3)$$

où w est le déplacement de l'impacteur pour une force F donnée. E est l'énergie transmise à la plaque.

Le matériau étudié manifeste un comportement linéaire élastique jusqu'à propagation instable du dommage. L'énergie critique E_C juste avant l'EDC est alors donnée par :

$$E_C = \frac{1}{2} F_C w_{0C} = \frac{F_C^2}{2K} \quad (3.4)$$

où w_{0C} est le déplacement lorsque la force atteint sa valeur critique F_C . K est la rigidité globale de la plaque déterminée par le meilleur ajustement par la méthode des moindres carrés de la partie linéaire de la courbe.

En réalité ce qui varie d'une dimension à l'autre est la rigidité globale K . Or d'après l'équation 3.4, le produit EK doit être aussi indépendant des dimensions planes en particulier pour $F = F_C$. La figure 3.4 montre bien qu'il existe une courbe normalisée, (ie : $EK - F$) indépendante des dimensions planes de la plaque. Cette constante EK peut être considérée à priori comme une propriété du matériau. En conséquence de quoi, la valeur de l'énergie critique E_C d'une plaque de dimension plane quelconque peut être définie par la connaissance de sa rigidité globale K . Nous proposons dans le chapitre V, un modèle de calcul de cette rigidité K et l'énergie critique pour une plaque de dimension quelconque sera alors donnée par la relation suivante :

$$E_C = \frac{(EK)_0}{K} \quad (3.5)$$

où $(EK)_0$ est une constante déterminée par un simple essai quasi-statique sur une plaque de référence. Si la nature et l'étendue du dommage à l'EDC sont aussi indépendantes des dimensions planes de la plaque, alors les champs de contraintes

et de déformations doivent être identiques juste avant la propagation instable du dommage et ce dans la zone endommagée. Autrement dit l'énergie interne dans cette zone doit être indépendante des dimensions planes à l'ECD. Les observations microscopiques de la zone endommagée confirmeront cette hypothèse.

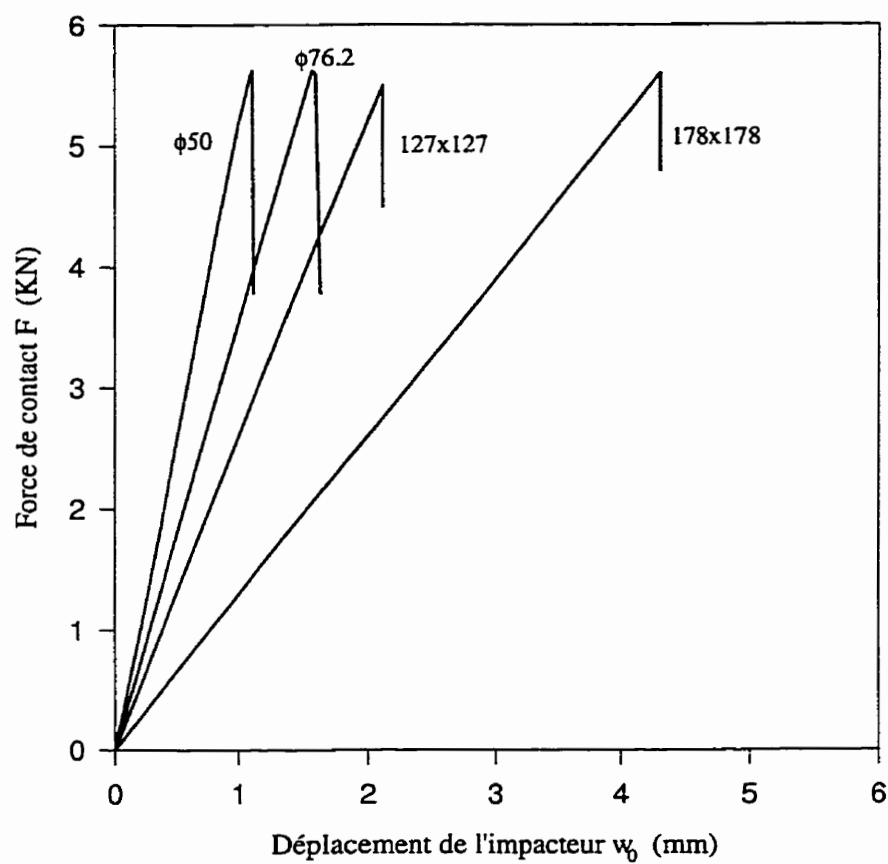


FIG. 3.2: Courbe $(F - w_0)$ pour différentes dimensions, (impacteur $D = 12.7$ mm)

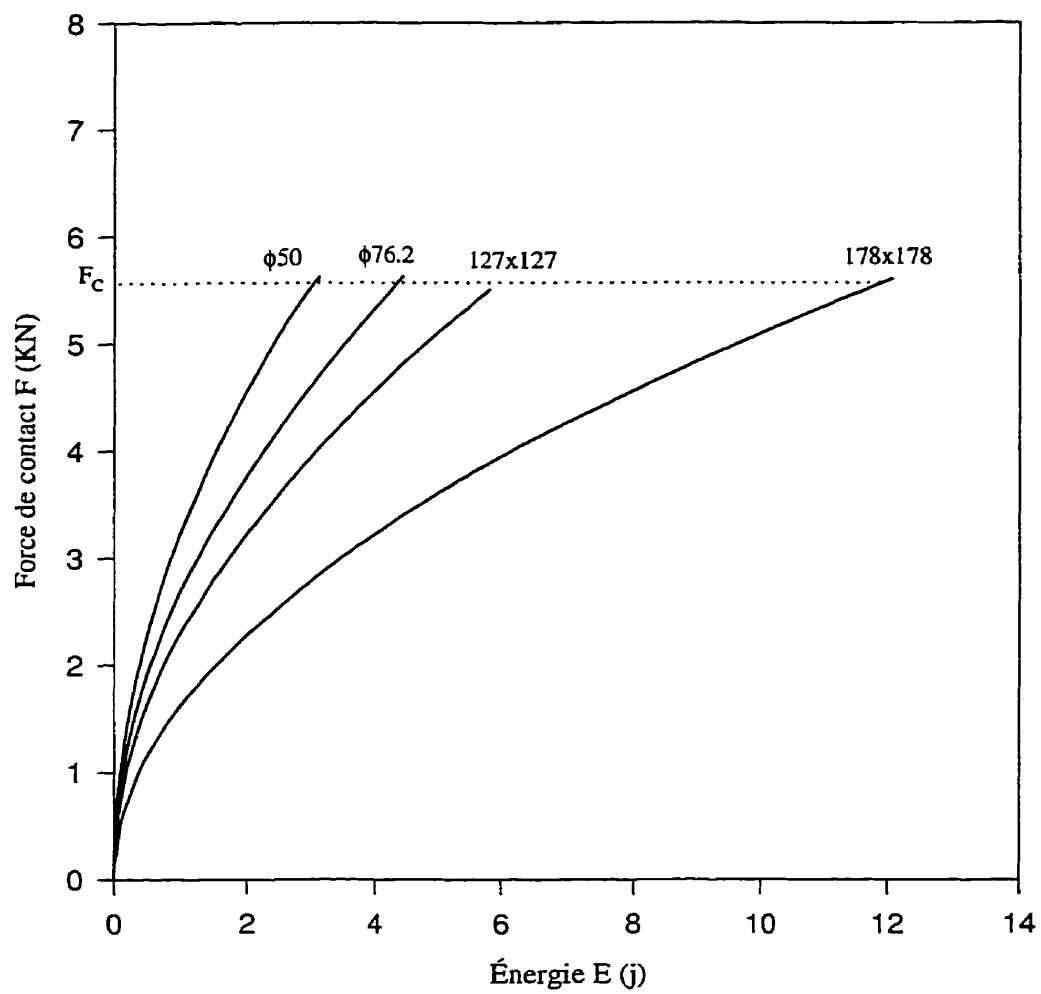


FIG. 3.3: Courbe $F - E$ pour différentes dimensions, (impacteur $D = 12.7$ mm)

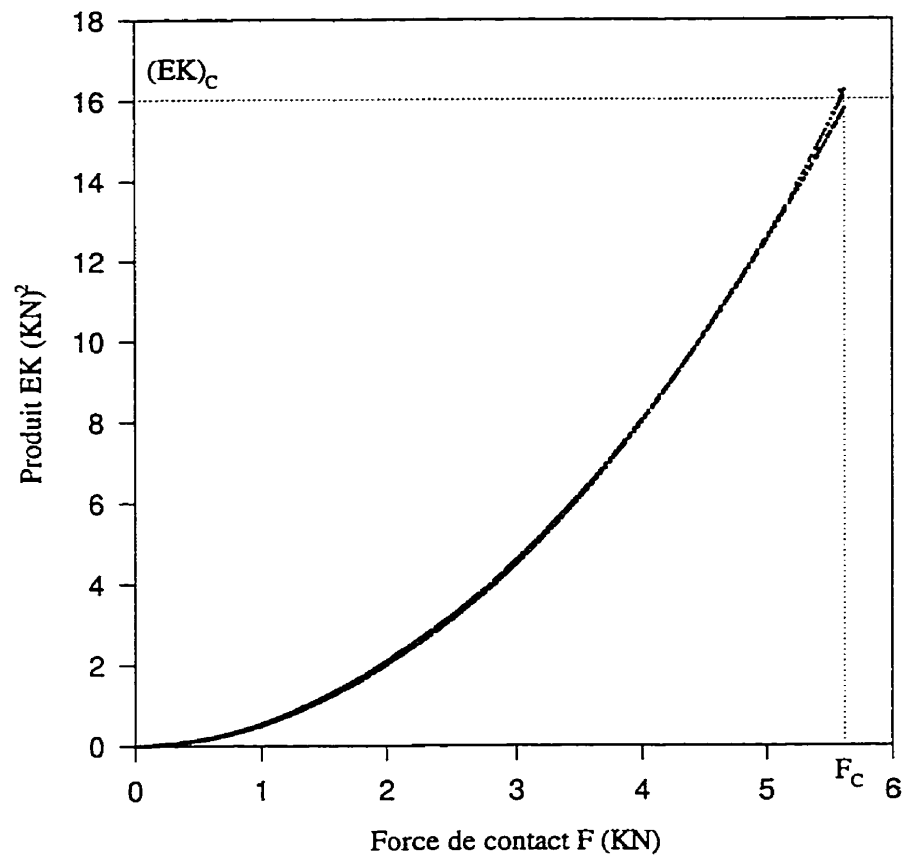


FIG. 3.4: Courbe $EK - F$ pour différentes dimensions planes, $\phi 50$, $\phi 76.2$, 127×127 et 178×178 , $D = 12.7$ mm

3.2 Essais du choc simple

Pour éviter des redites, les résultats relatifs à la force critique F_C , l'énergie critique E_C ainsi que l'effet des dimensions planes sur ces grandeurs sont regroupés dans le seul paragraphe suivant :

D'abord, la figure 3.5 illustre une variation type de la force de contact en fonction du temps pour une énergie supérieure à l'énergie critique causant la propagation instable du dommage. La réduction de la charge à l'EDC est très visible sur ce graphique. Après l'EDC, la plaque continue tout de même à supporter la charge mais avec une rigidité moindre. L'énergie du choc est de l'ordre de 4 joules alors que l'énergie critique E_C pour cette plaque est de l'ordre de $E_C = 3.1 \text{ j}$. Dans le souci de vérifier la constance de la force critique F_C , les deux plaques $\phi 50$ et $\phi 76.2$ sont testées. Les chocs ont été réalisés à des énergies légèrement supérieures aux énergies critiques de propagation instable du dommage. La figure 3.6 montre le résultat de ces essais. Les courbes sont ramenées à la variation de la force en fonction du déplacement de l'impacteur. On observe pour les deux plaques une chute brutale de la force de contact à l'EDC. Il s'agit d'un comportement semblable à celui rencontré dans le cas des chargements quasi-statiques. La force critique à l'EDC, F_C est constante et indépendante des dimensions planes. Cette force pour le stratifié étudié est de l'ordre de $F_C = 6 \text{ KN}$, alors que dans le cas statique, elle est de l'ordre de $F_C = 5.5 \text{ KN}$. Cela correspond à une différence relative de (5% à 10%). On peut donc conclure que la

force critique à l'EDC est pratiquement la même pour les deux chargements statique et dynamique. En outre, cette force critique est aussi indépendante des dimensions planes. Une comparaison plus détaillée entre ces deux chargements est donnée dans les pages suivantes.

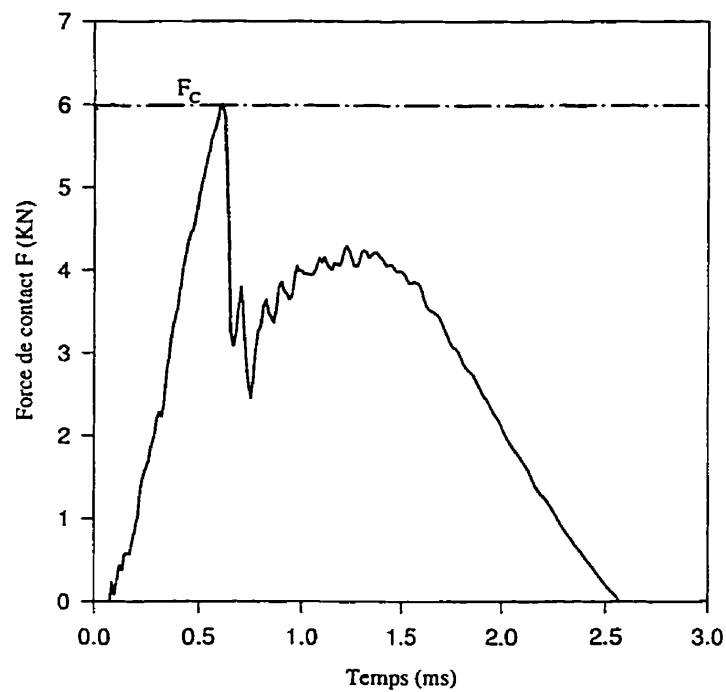


FIG. 3.5: Variation de la force en fonction du temps lors d'un choc simple, Impacteur $D = 12.7 \text{ mm } \phi 50$

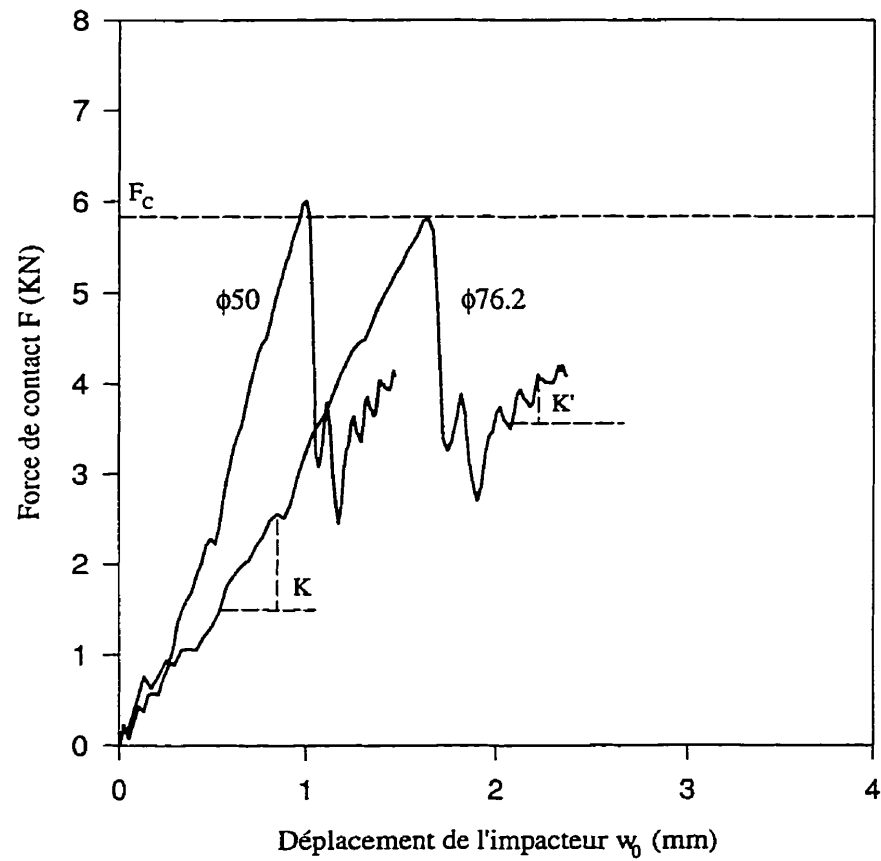


FIG. 3.6: Variation de la force en fonction du déplacement lors d'un choc simple,
Impacteur $D = 12.7$ mm

3.3 Corrélation entre les chargements statique et dynamique

3.3.1 Force critique à la propagation instable du dommage

Pour mieux comparer les deux réponses statique et dynamique, la figure 3.7 montre la variation de la force de contact en fonction du déplacement de l'impacteur. On peut conclure que le matériau suit dans les deux cas un comportement élastique linéaire jusqu'à $F = F_C$. La force critique dans le cas du choc simple est légèrement supérieure à celle obtenue lors des essais quasi-statiques. Puisque les courbes $(F - w_0)$ des chargements statique et dynamique sont pratiquement confondues, alors elles ont la même rigidité globale K . Il est à noter qu'il s'agit de plaques de même dimensions. Or la rigidité globale ne dépend que des propriétés du matériau, des dimensions et des conditions aux limites. Comme les dimensions ainsi que les conditions aux limites sont maintenues identiques pour les deux chargements, on en déduit que les propriétés du matériau ne sont pas affectées par l'effet de la vitesse du chargement. Cela implique que la composante visqueuse de la matrice époxy est pratiquement sans effet sur le comportement de ce matériau pour cette gamme de vitesses, (ie : choc à faible énergie). De même, pour ces chocs à faible énergie, les durées du choc sont plus larges ce qui correspond à des accélérations faibles. Pour ce matériau, la densité est faible, ce qui conduit à des forces d'inertie négligeables. D'où les deux réponses statique et

dynamique sont pratiquement identiques. Cela est évidemment vrai pour un cycle de chargement. La réponse au choc à faible énergie peut alors être ramenée à celle d'un chargement quasi-statique tout au moins concernant la variation de la force en fonction du déplacement de l'impacteur jusqu'à l'EDC.

3.3.2 Énergie critique à la propagation instable du dommage

Comme dans le cas statique, l'énergie critique à l'EDC dépend des dimensions planes de la plaque. La figure 3.8 montre la variation de l'énergie en fonction de la force de contact. Puisque les courbes force-déplacement sont identiques en statique et en dynamique pour les mêmes dimensions planes, il est alors évident que celles de l'énergie-force le seront aussi. Cela est d'ailleurs confirmé par la figure 3.8. Par contre, ce qui est intéressant dans les courbes dynamiques, c'est qu'on peut calculer l'énergie absorbée par la plaque à l'EDC puisque l'énergie restituée est aussi mesurée lors du déchargement. La figure 3.9 montre la variation de l'énergie en fonction du déplacement de l'impacteur pour les deux événements, (ie : chargement-déchargement). Cette énergie absorbée E_a peut être déterminée directement dans la figure 3.9 par la relation suivante : $E_a = E_t - E_e$. Où E_t est l'énergie transmise à la plaque lorsque la force atteint sa valeur maximale, (ie : la vitesse de l'impacteur devient nulle). Si toute l'énergie est transmise à la plaque, cette énergie n'est autre que l'énergie de l'impacteur juste avant le choc, soit $E_t = \frac{1}{2}mv_0^2$, m et v_0 sont la masse

et la vitesse de l'impacteur juste avant le choc. E_e est l'énergie élastique recouverte lorsque la plaque retourne à sa position initiale. Ces différentes énergies sont illustrées dans la figure 3.9. Pour les deux plaques, on a pratiquement la même énergie absorbée $E_a \approx 2 \text{ J}$. Une conséquence importante découle du fait que l'énergie absorbée par la plaque est indépendante des dimensions planes. Car, en réalité, cette énergie n'est autre que l'énergie nécessaire à créer et à faire propager le dommage de façon instable. Il s'agit une autre fois de confirmer que cet EDC peut être considéré comme une propriété du matériau. Dans un travail antérieur de Boukhili et al, [88], il a été vérifié expérimentalement que pour le même matériau objet de la présente étude, la projection de la surface endommagée à la transition I, (ie : EDC) est indépendante des dimensions planes et il est de l'ordre de 2 cm^2 . L'aire endommagée est mesurée par des ondes ultrasons, (ie : Cscan). Donc, on peut affirmer à priori que l'étendue du dommage est aussi indépendante des dimensions planes. Une analyse microscopique est nécessaire pour déterminer la variation du dommage à travers l'épaisseur de la plaque ainsi que sa nature. Le paragraphe suivant présente les résultats des observations du faciès de rupture dans la zone endommagée.

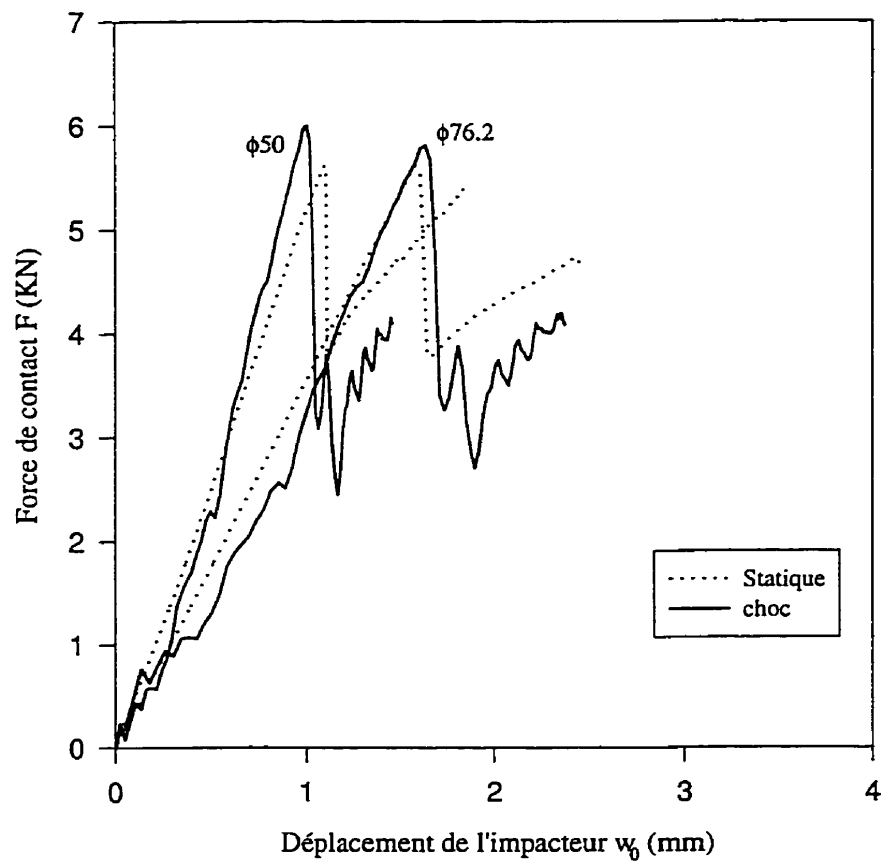


FIG. 3.7: Comparaison entre les réponses statique et dynamique, Impacteur $D = 12.7$

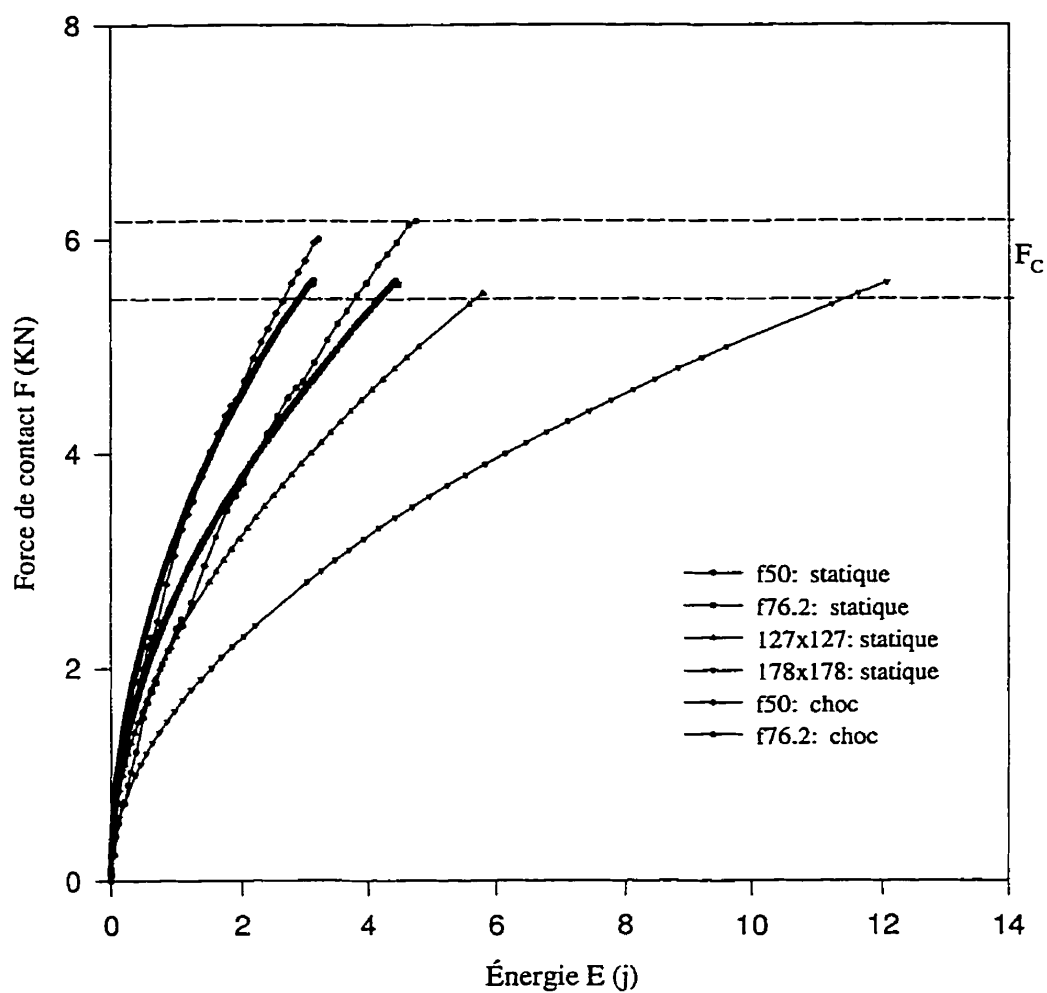


FIG. 3.8: Comparaison entre les courbes ($F - E$) pour les chargements statique et dynamique, Impacteur $D = 12.7$ mm

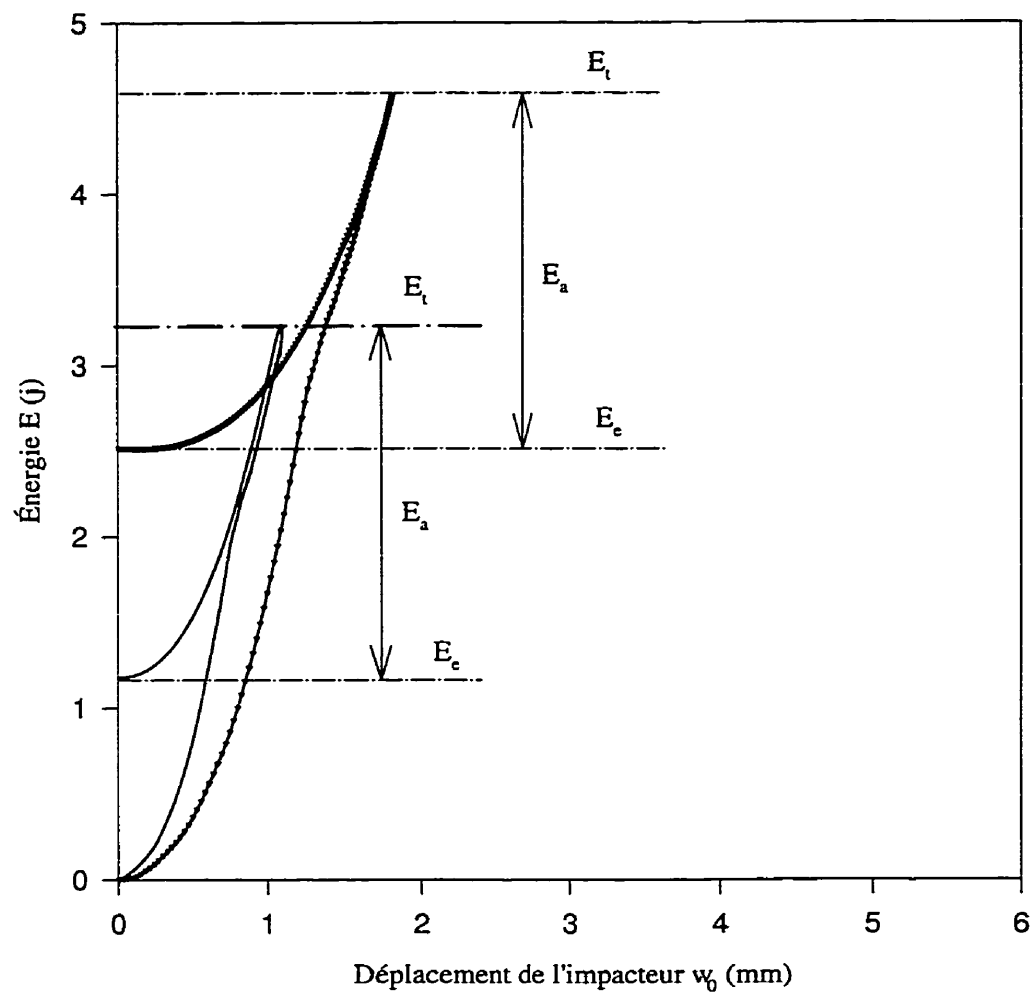


FIG. 3.9: Mise en évidence des énergies E_a , E_t et E_e $\phi 50$, $\phi 76.2$, $D = 12.7$ mm

3.3.3 Évolution du dommage

La détermination de l'évolution du dommage depuis l'état d'une pièce non endommagée jusqu'à l'EDC est pratiquement impossible à réaliser par des essais quasi-statiques. Il est certes évident que des microdommages peuvent survenir dans le cas des chargements quasi-statiques même si les charges mises en jeu sont inférieures à la charge critique F_C et ce, à cause de l'hétérogénéité des matériaux composites. La densité de ces microfissures est très faibles ainsi que leurs tailles. Cet état du dommage n'affecte pratiquement pas la rigidité globale du matériau. Par contre, on peut voir des dommages très nets lorsque la charge est supérieure à F_C . Les figures 3.10 à 3.12 montrent que le dommage est un réseau complexe formé de fissures transverses dans la matrice interconnectées aux délaminages interlaminaires. Les fissures dans la matrice sont inclinées d'un angle approximatif de 45° . Les contraintes "responsables" de la création de ces fissures sont principalement les contraintes σ_y et τ_{xy} . Le délaminage interlaminaire est plutôt attribué aux contraintes interlaminaires τ_{xz} , τ_{yz} et σ_z . Des fissures droites dues à la tension σ_x sont aussi observées. En réalité la création et la propagation du dommage est une conséquence d'interaction entre toutes ces contraintes. Dans la figure 3.12, on voit clairement l'existence de fibres rompues en plusieurs endroits.

Le choc répété constitue une méthode élégante et efficace pour comprendre les mécanismes d'endommagement lors d'un chargement dynamique. Une présentation

détaillée de la procédure est donnée dans la référence [43]. La figure 3.13 montre l'état du dommage d'une plaque soumise à un nombre de chocs supérieur au nombre de chocs à la transition I, (ie : EDC). Comme dans le cas statique, le dommage est un réseau interconnecté formé de fissures transverses dans la matrice, de ruptures par délaminage interlaminaire, de fissures droites dans la matrice et finalement par la rupture de certaines fibres. Les figures 3.14 à 3.17 montrent certains types de fissures induites dans la plaque sévèrement endommagée, (ie : au-delà de l'EDC). La figure 3.16, illustre des ruptures dans une zone à concentration de résine. Le délaminage entre matrice et fibre est aussi présent comme le montre la figure 3.17.

Des essais du choc répété avec des énergies inférieures à l'énergie critique E_C ont été réalisés à différents nombres d'impacts. Des observations au microscope optique de ces plaques ont montré que pour des nombres faibles de chocs, le dommage est localisé dans la zone du contact. Aucun autre dommage apparent n'est observé. Lorsque le nombre de choc augmente, les fissures droites et transverses apparaissent en deuxième lieu. Les figures 3.18 et 3.19 montrent une fissure transverse dont une extrémité est dans le pli à 0° et l'autre débouche sur l'interface $0/45$ sans la présence du délaminage interlaminaire. À tous les stades du dommage, celui-ci possède toujours une forme tronconique. Des fissures transverses semblables sont observées dans la zone symétrique à la précédente comme le montre bien la figure 3.20. Au fur et à mesure que le nombre d'impacts augmente, la densité de ces fissures augmente et les

connections entre elles se forment. Les délaminages apparaissent et se propagent de façon instable pour un ou deux chocs de plus.

Nous pouvons conclure des observations microscopiques que le dommage à l'EDC présente toujours une forme tronconique ayant sa grande base dans le pli symétrique à celui soumis directement au choc. La forme et la nature du dommage sont semblables pour les différentes dimensions testées, que ce soit en statique ou en dynamique. L'indépendance entre la surface projetée du dommage et des dimensions planes a été déjà vérifié pour ce même matériau, [43, 88, 105]. En combinant ces deux résultats, (ie : étendue et nature du dommage), on peut affirmer que le volume endommagé à la transition I, (ie : EDC) est indépendant des dimensions planes de la plaque. On en déduit que l'énergie absorbée par unité de volume de la zone endommagée l'est aussi. Dans ces conditions, on peut conclure que l'état de contraintes en tout point de la zone endommagée juste avant l'EDC est indépendant des dimensions planes de la plaque. Par conséquent, l'EDC peut être traité comme une propriété intrinsèque au matériau. Dans notre approche, objet des chapitres IV et V, il n'est pas nécessaire de connaître avec précision la nature et l'évolution du dommage. Ce qui importe, est qu'il existe un état de dommage critique EDC pouvant être déterminé par la connaissance de la force critique F_C et que tout chargement en dessus de F_C induit des dommages importants dans la pièce comme il a pu être constaté dans la figure 3.13. L'EDC peut être considéré comme un seuil très utile à la conception des structures en matériaux

composites. En plus, il a l'avantage d'être parfaitement défini par la connaissance d'un seul paramètre global à savoir F_C .

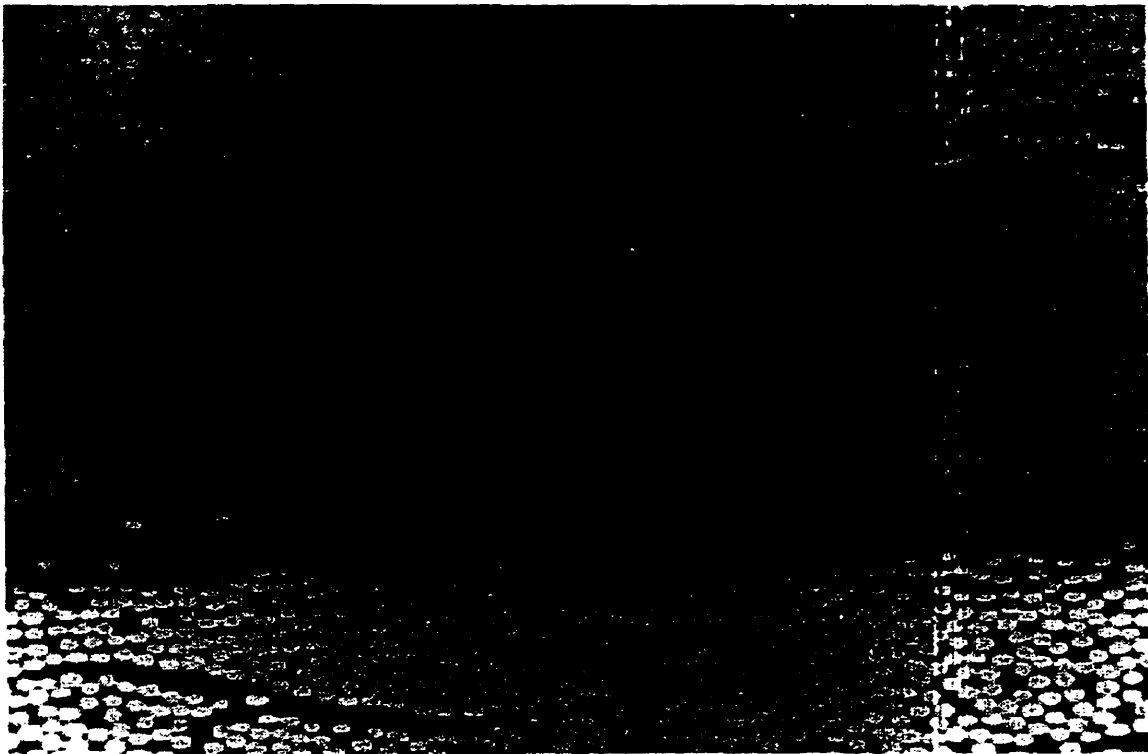


FIG. 3.10: Réseau du dommage observé : chargement statique à $F > F_C$

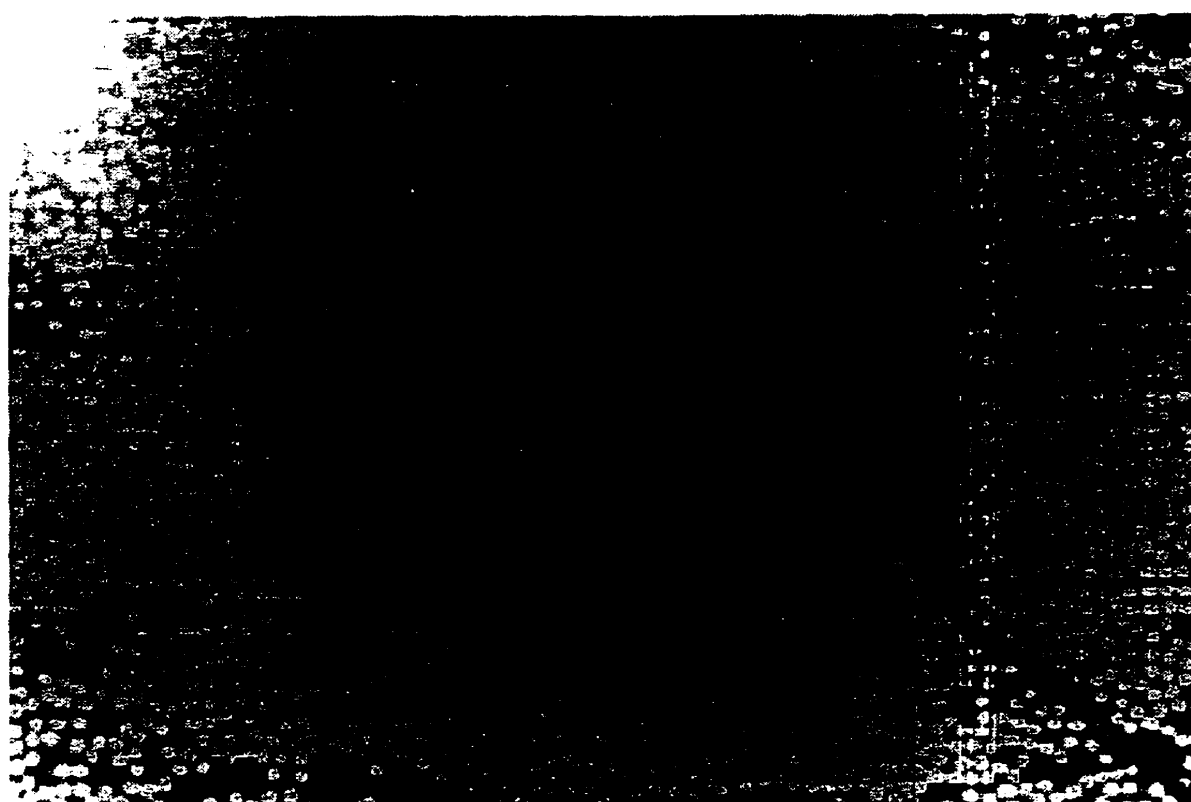


FIG. 3.11: Réseau du dommage observé : partie symétrique de celle montrée à la figure 3.10

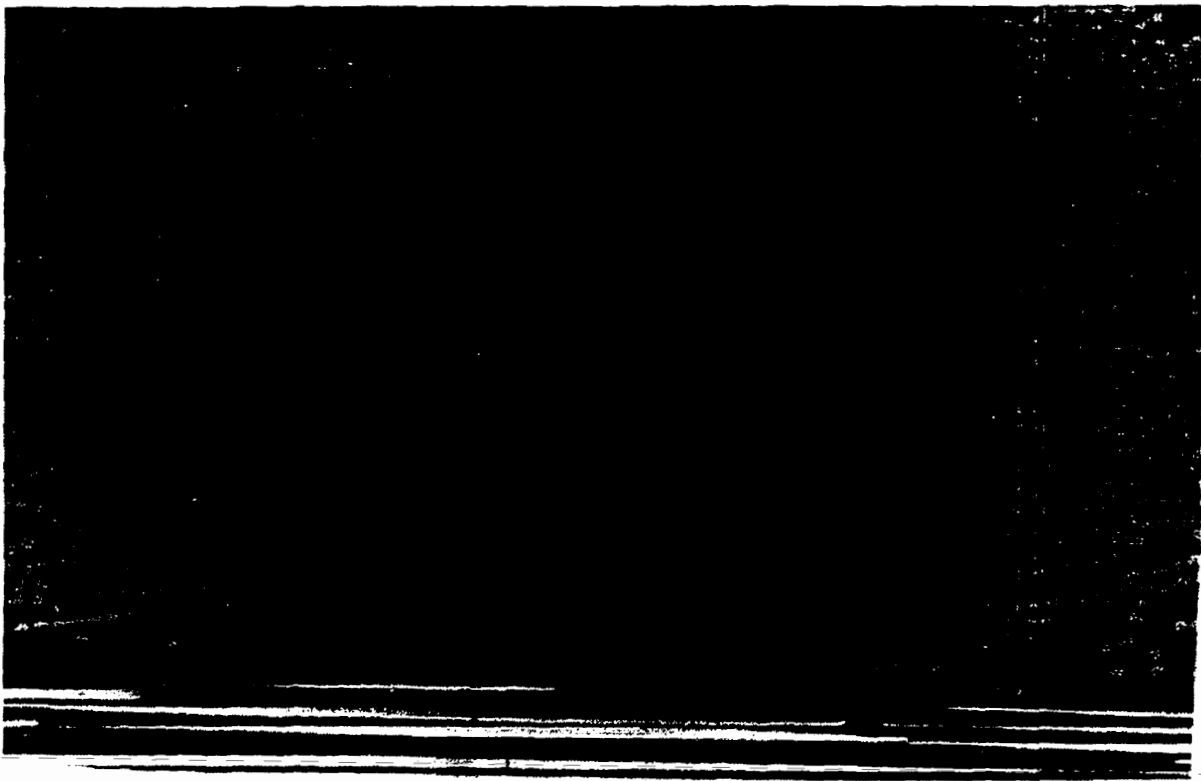


FIG. 3.12: Mise en évidence de rupture de fibres et de fissures droites, $F > F_C$

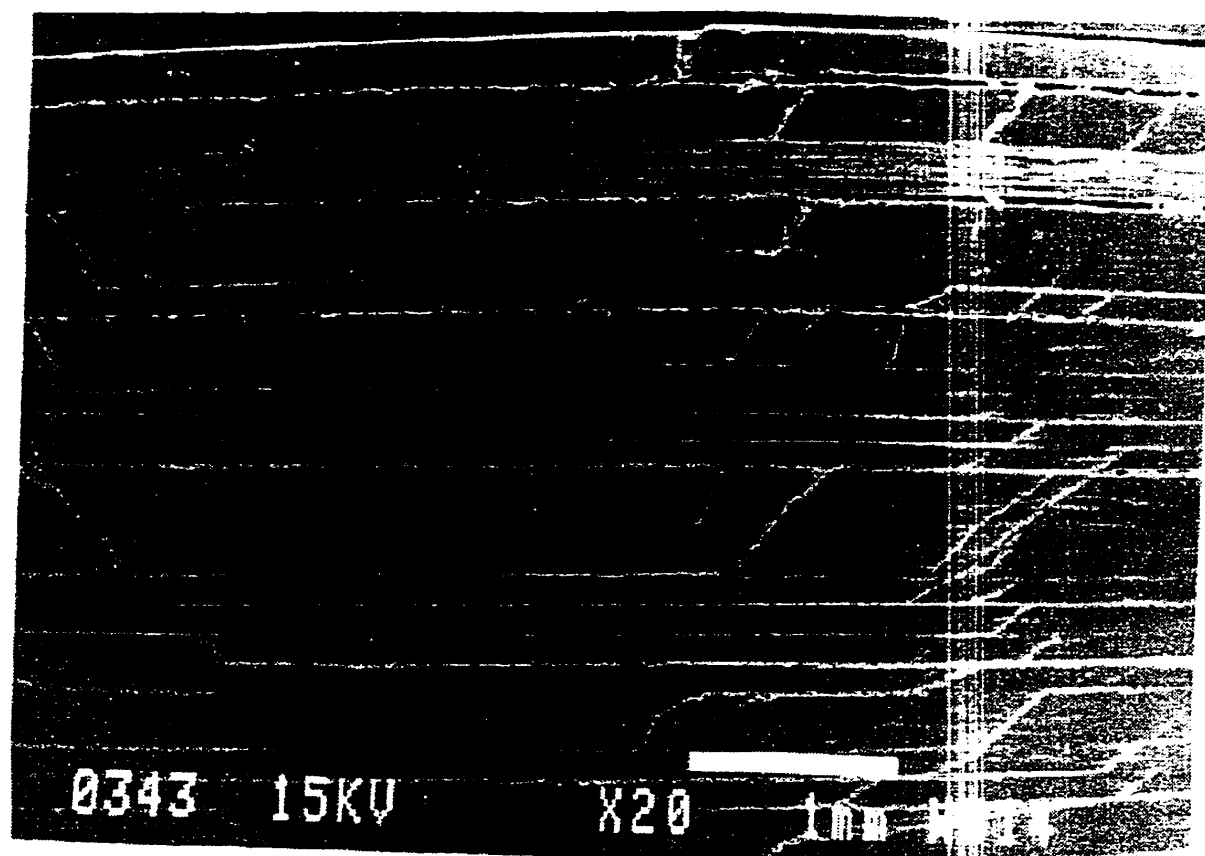


FIG. 3.13: Réseau du dommage dans une plaque soumise au choc répété au-delà de l'EDC.

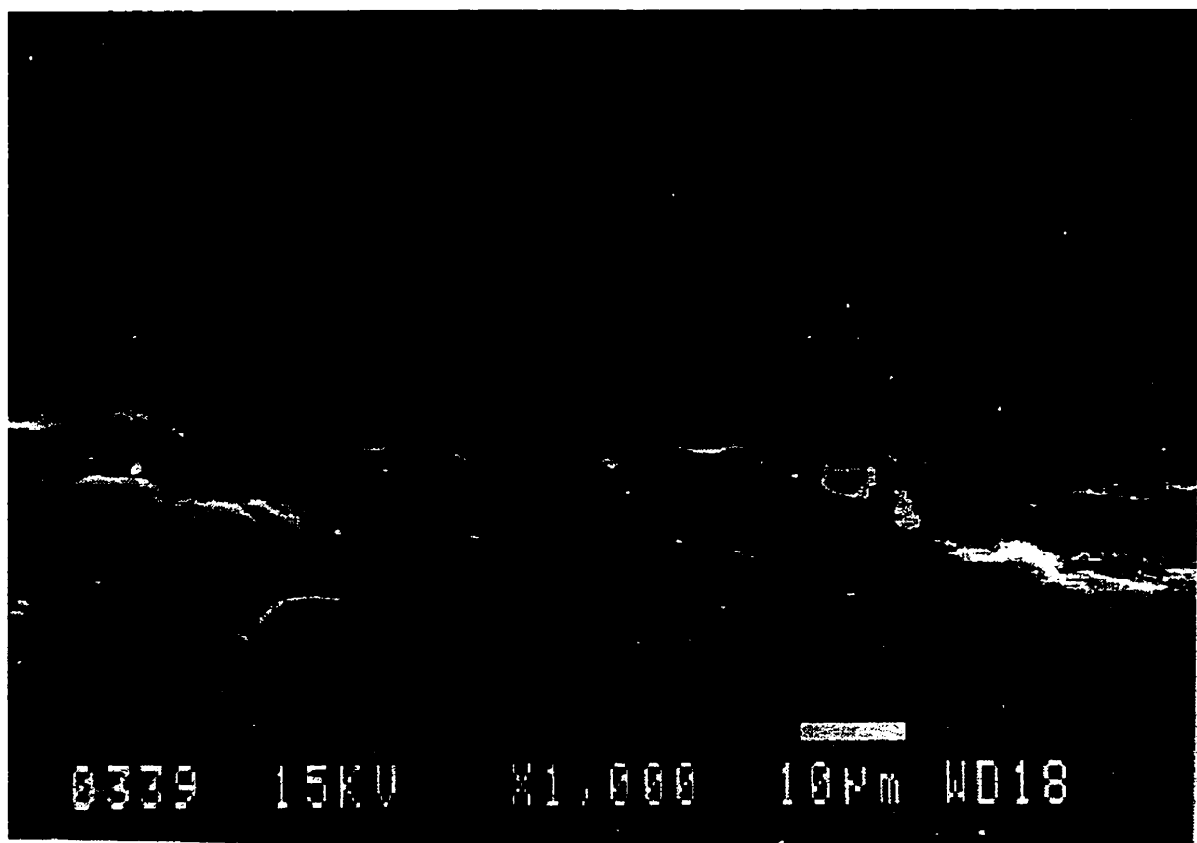


FIG. 3.14: Mise en évidence des fissures transverses connectées au délaminage.

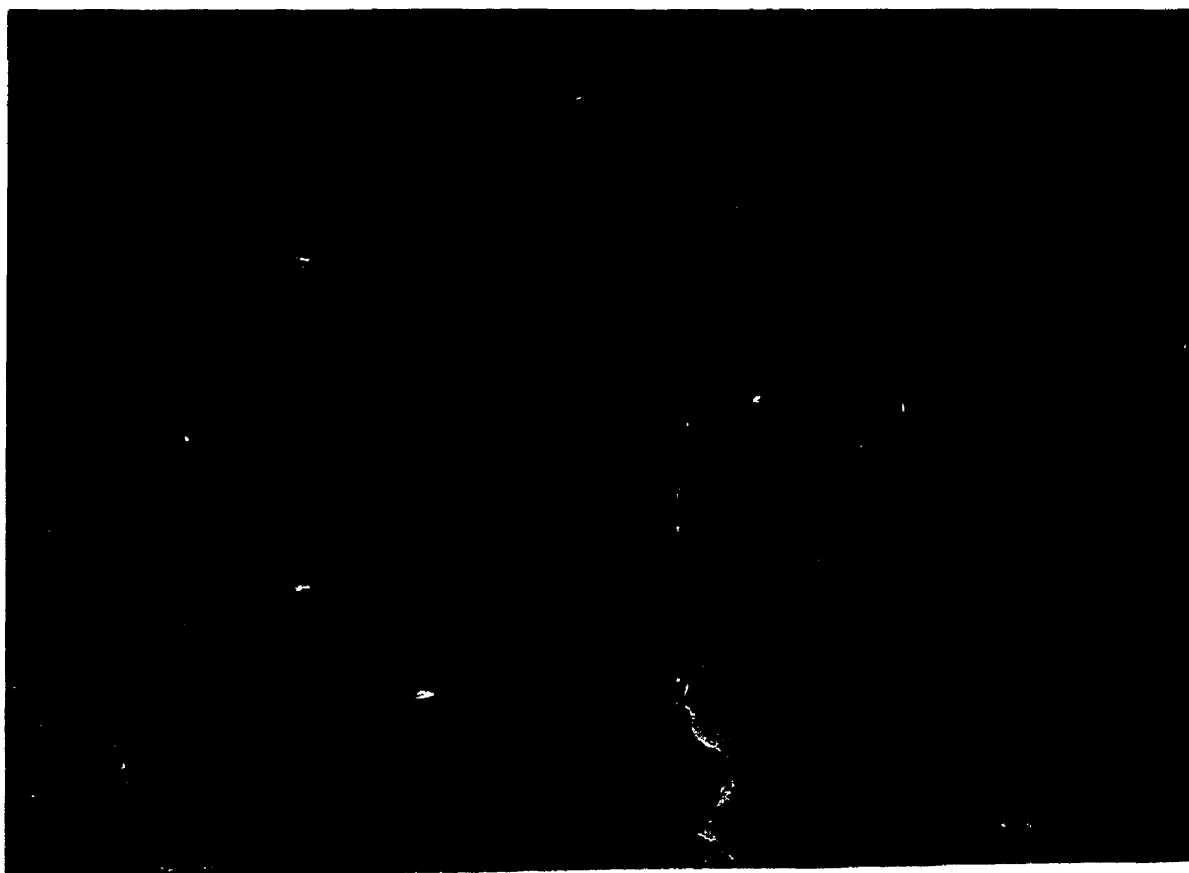


FIG. 3.15: Mise en évidence de fissure droite dans un pli à 45°.

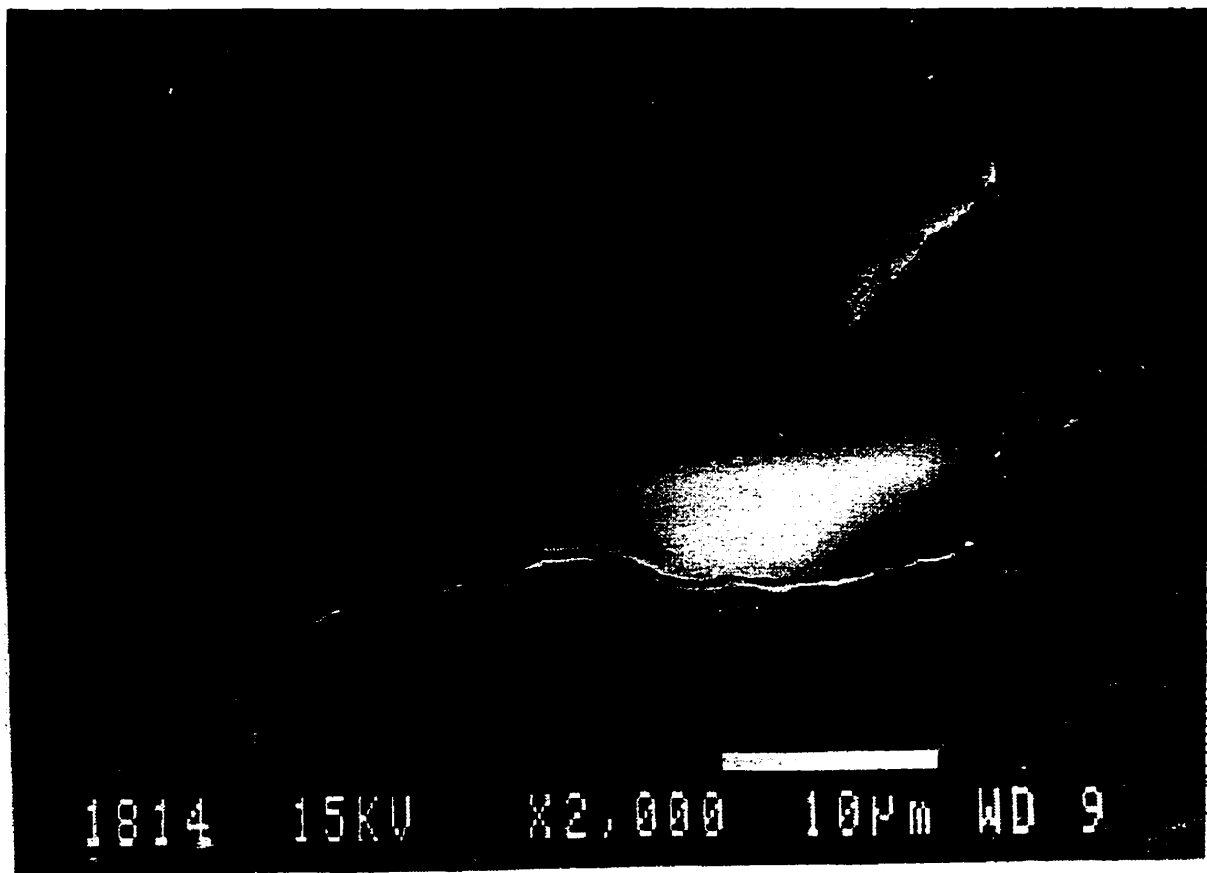


FIG. 3.16: Mise en évidence de fissures dans une zone de concentration de résine, interface $\pm 45^\circ$

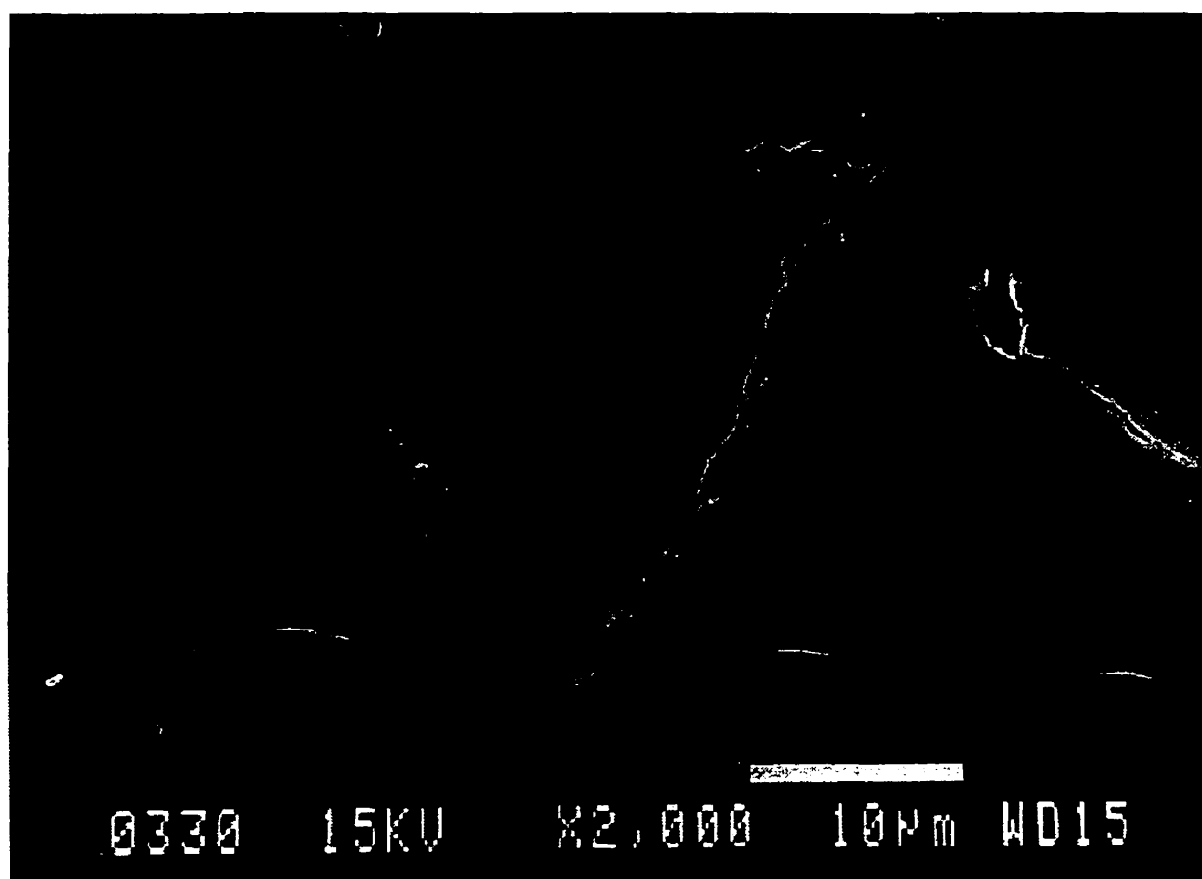


FIG. 3.17: Mise en évidence de délaminage entre fibre et matrice.

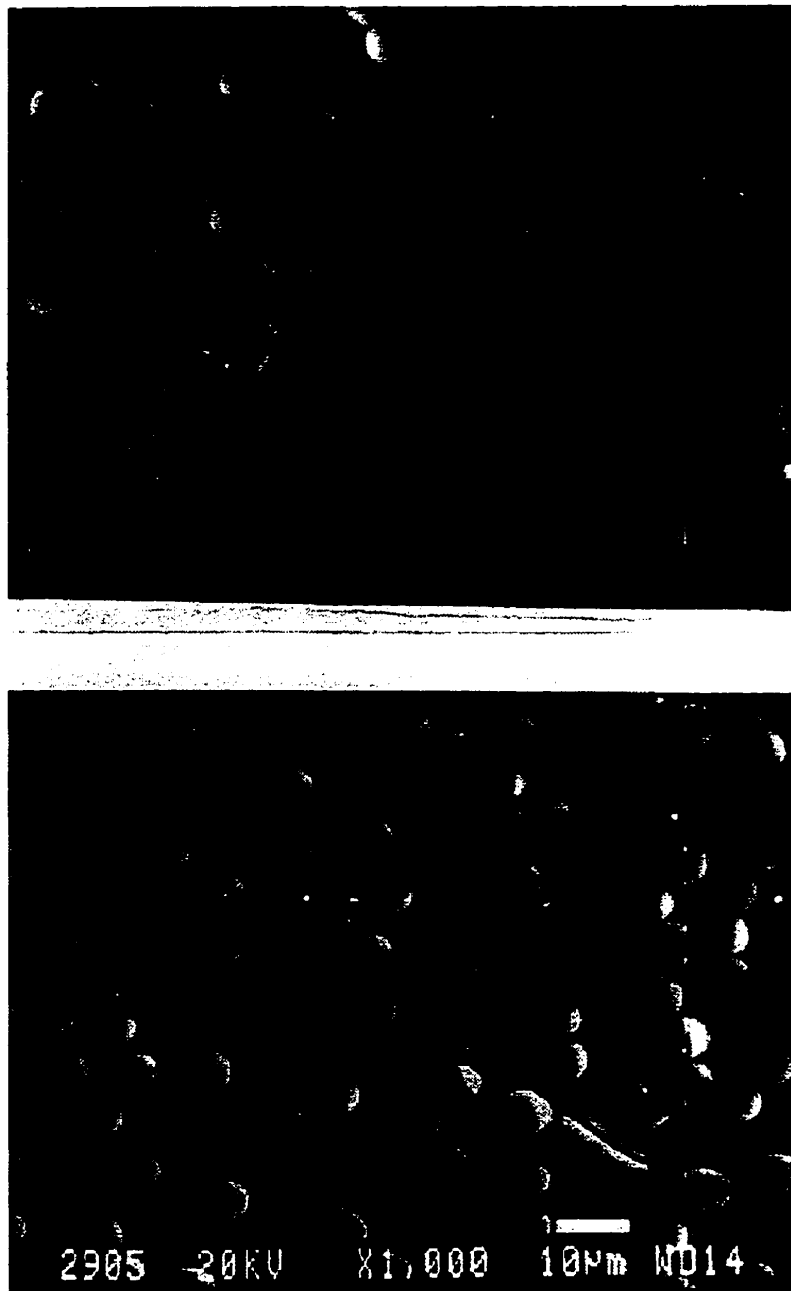


FIG. 3.18: Fissure transverse dans un pli à 0° et qui prend fin à l'interface $0/45$ sans délaminage.

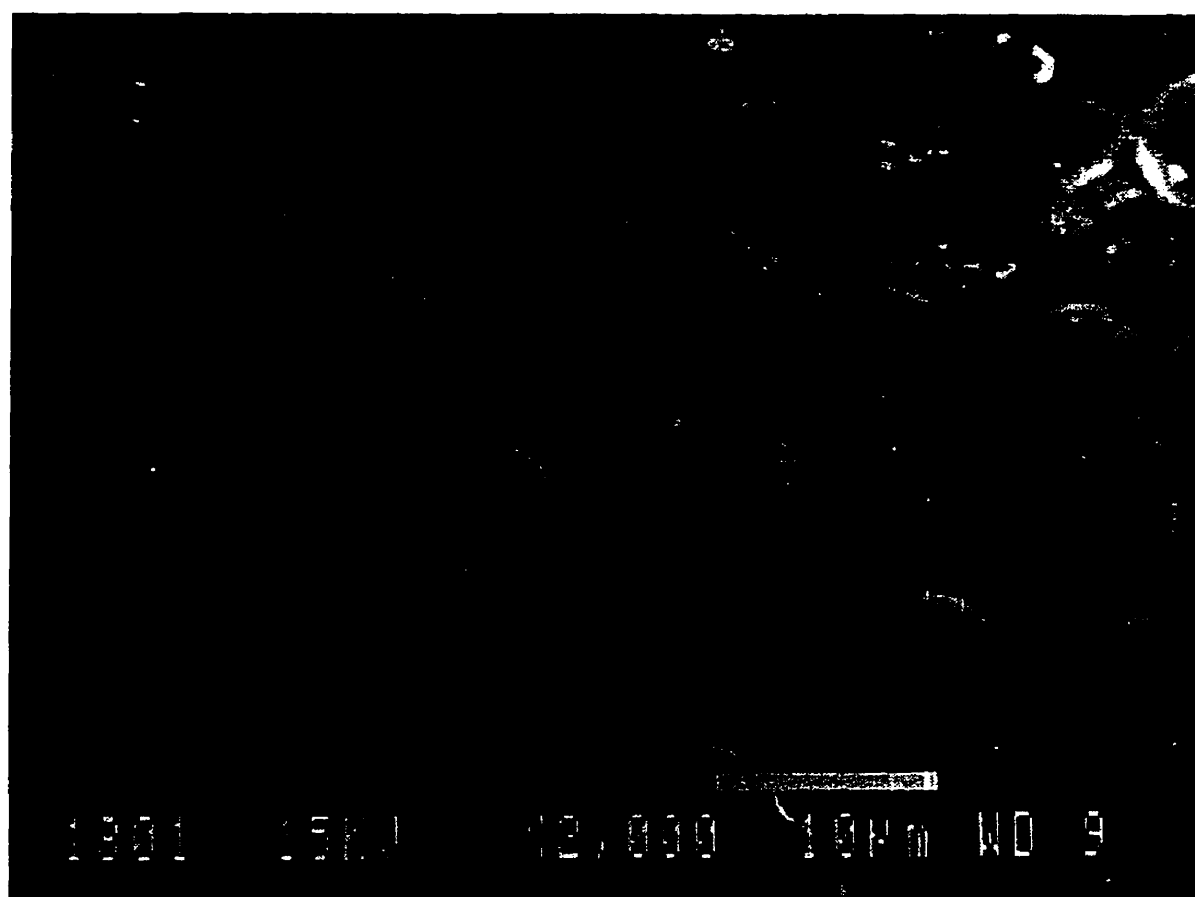


FIG. 3.19: Agrandissement de la fissure précédente, extrémité 0°.

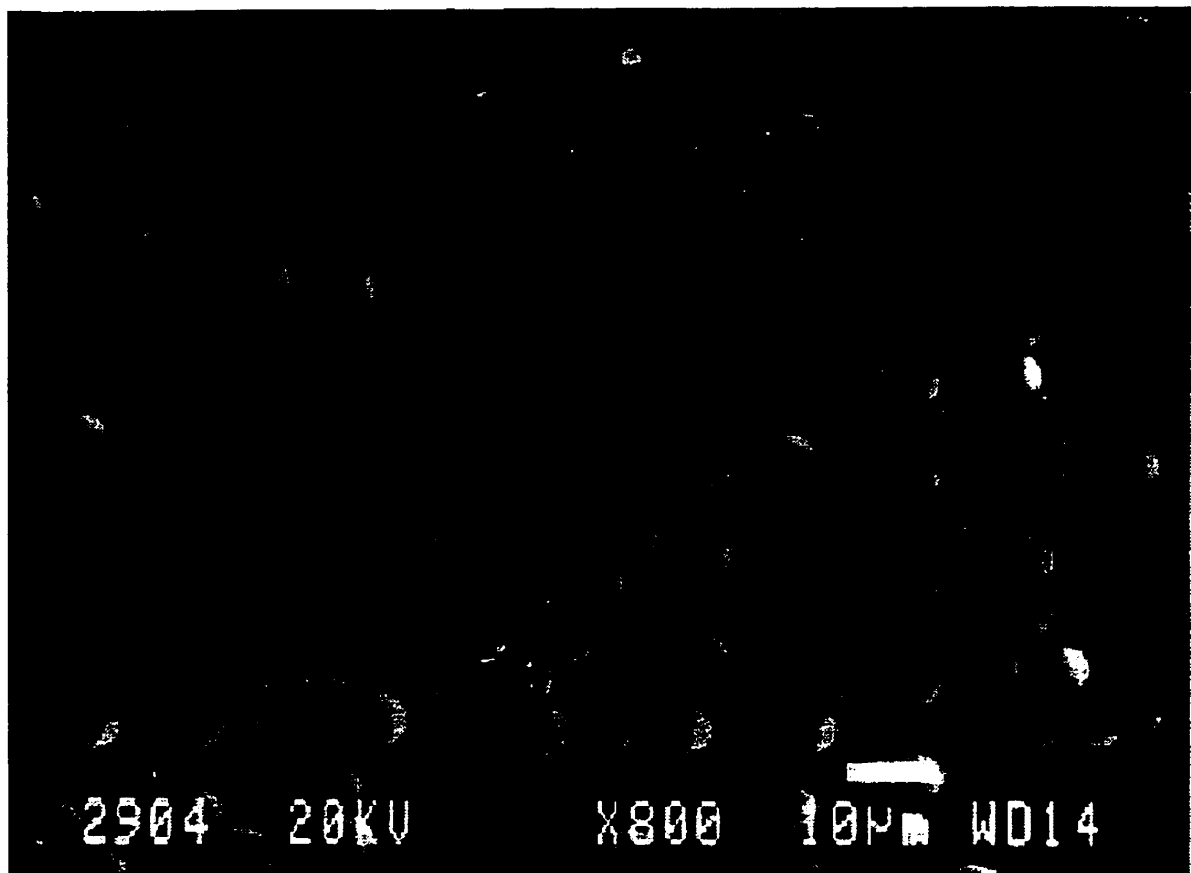


FIG. 3.20: Mise en évidence de fissures semblables symétriques à la précédente.

Chapitre 4

Problème du contact

4.1 Réponse globale de la plaque

Comme il a été déjà signalé dans le chapitre I, les modèles analytiques présentés dans la littérature sont tous dérivés de l'hypothèse du demi-espace et d'un matériau orthotrope ou transversalement isotrope. Dans l'approche que nous proposons seules les hypothèses suivantes ont été faites :

1. la plaque a une épaisseur constante,
2. le matériau de la plaque obéit à la loi de Hooke généralisée,
3. la plaque possède un plan de symétrie parallèle à son plan médian, comme illustré sur la figure 4.1,
4. le déplacement transversale u_z est indépendant de z ,

5. les contraintes de cisaillement interlaminaire τ_{xz} et τ_{yz} varient à travers l'épaisseur de la plaque selon une loi spécifique .

Les trois premières hypothèses peuvent être considérées globales et couvrent la grande partie des matériaux composites stratifiés utilisés dans l'industrie. En accordant les hypothèses (4) et (5), on peut alors écrire :

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

$$\tau_{xz} = (\alpha_z^1 f_1(z) + \beta_z^1) \phi(x, y) \quad (4.2)$$

$$\tau_{yz} = (\alpha_z^2 f_2(z) + \beta_z^2) \psi(x, y) \quad (4.3)$$

où $\phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont des fonctions arbitraires dépendant des coordonnées (x, y) ; et f_i , $(i = 1, 2)$ sont les fonctions caractérisant la loi de variation des contraintes de cisaillement τ_{xz} et τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque. α_z^i et β_z^i , $(i = 1, 2)$ sont des constantes variant d'un pli à l'autre. Elles sont déterminées par la continuité des contraintes de cisaillement interlaminaires et des déplacements u_x et u_y aux interfaces des plis adjacents ainsi par le fait que τ_{xz} et τ_{yz} sont toutes les deux nulles aux surfaces externes, $z = \pm \frac{h}{2}$.

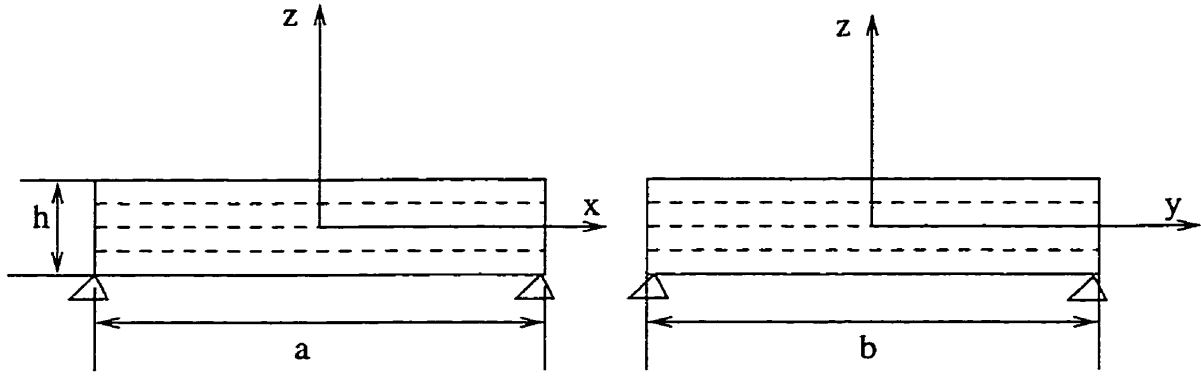


FIG. 4.1: Géométrie de la pièce et repère choisi

La loi de Hooke généralisée pour un pli à une orientation θ quelconque s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{55} & 0 \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Où les coefficients de souplesse a_{ij} sont fonctions des constantes techniques d'un pli orthotrope comme détaillées dans la référence [20].

En remplaçant dans les deux dernières équations de 4.4 les contraintes de cisaillement interlaminaire par leurs expressions données par les équations 4.2 et 4.3, on obtient pour les déformations de cisaillement interlaminaire les expressions suivantes :

$$\epsilon_{xz} = a_{55}(\alpha_z^1 f_1(z) + \beta_z^1)\phi(x, y) + a_{45}(\alpha_z^2 f_2(z) + \beta_z^2)\psi(x, y) \quad (4.5)$$

$$\epsilon_{yz} = a_{45}(\alpha_z^1 f_1(z) + \beta_z^1)\phi(x, y) + a_{44}(\alpha_z^2 f_2(z) + \beta_z^2)\psi(x, y) \quad (4.6)$$

Si on suppose le cas des faibles déformations, nous pouvons exprimer les déformations en termes des déplacements comme suit :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.7)$$

L'équation 4.7 peut être écrite en particulier pour les déformations de cisaillement, ce qui donne en remplaçant le déplacement u_z par w :

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \epsilon_{xz} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \epsilon_{yz} \quad (4.9)$$

En intégrant par rapport à z les expressions 4.8 et 4.9 de $z = 0$ à z , et en tenant compte que pour $z = 0$, $u_x(x, y, 0) = u$ et $u_y(x, y, 0) = v$, on obtient les relations suivantes pour les déplacements u_x et u_y :

$$u_x = u - z \frac{\partial w}{\partial x} + \Gamma_{55}^1(z)\phi(x, y) + \Gamma_{45}^2(z)\psi(x, y) \quad (4.10)$$

$$u_y = v - z \frac{\partial w}{\partial y} + \Gamma_{45}^1(z)\phi(x, y) + \Gamma_{44}^2(z)\psi(x, y) \quad (4.11)$$

$$\Gamma_{ij}^1 = \int_0^z a_{ij}(\alpha_z^1 f_1(z) + \beta_z^1) dz \quad \Gamma_{ij}^2 = \int_0^z a_{ij}(\alpha_z^2 f_2(z) + \beta_z^2) dz$$

En substituant les valeurs de u_x et u_y données par les équations 4.10 et 4.11 dans les relations des déformations données par l'équation 4.7, nous obtenons les expressions suivantes :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Gamma_{55}^1(z) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Gamma_{45}^2(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.12)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \Gamma_{45}^1(z) \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Gamma_{44}^2(z) \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.13)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \Gamma_{45}^1(z) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Gamma_{55}^1(z) \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Gamma_{44}^2(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Gamma_{45}^2(z) \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.14)$$

Les équations d'équilibre en l'absence des forces de volume s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

En remplaçant les contraintes de cisaillement interlaminaire τ_{xz} et τ_{yz} par leur expressions données par les équations 4.2 et 4.3 dans la troisième équation d'équilibre, on peut déterminer la contrainte σ_z comme suit :

$$\sigma_z = \xi(x, y) - J_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} - J_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.16)$$

Où J_1 et J_2 sont donnés par les relations suivantes :

$$J_1 = \int (\alpha_z^1 f_1(z) + \beta_z^1) dz \quad J_2 = \int (\alpha_z^2 f_2(z) + \beta_z^2) dz \quad (4.17)$$

et $\xi(x, y)$ est la fonction d'intégration déterminée par les conditions sur σ_z aux surfaces inférieure et supérieure : (pour $z = -h/2$, $\sigma_z = 0$ et pour $z = +h/2$, $\sigma_z = p(x, y)$). Où $p(x, y)$ est la pression de contact. En portant ces conditions sur σ_z dans l'équation 4.16, nous pouvons exprimer la fonction $\xi(x, y)$, soit :

$$\xi(x, y) = p(x, y) + J_1(h/2) \frac{\partial \phi}{\partial x} + J_2(h/2) \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.18)$$

En plus de cette équation, nous obtenons une autre relation qui n'est autre que la troisième équation d'équilibre. L'expression finale de σ_z est donnée par l'équation suivante :

$$\sigma_z = p(x, y) + (J_1(h/2) - J_1) \frac{\partial \phi}{\partial x} + (J_2(h/2) - J_2) \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.19)$$

En exprimant les contraintes en termes de déplacement et des fonctions de cisaillement interlaminaire $\phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ et en intégrant la première équation d'équilibre pour z allant de $-\frac{h}{2}$ à $+\frac{h}{2}$; et aussi en multipliant les deux dernières équations d'équilibre par z et en les intégrant entre les mêmes bornes ($z = \pm \frac{h}{2}$), nous aboutissons alors au système différentiel suivant :

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
& - [D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}] \\
& + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} (\Gamma_{1155}^{1z} + \Gamma_{1645}^{1z} - J_{11}^z) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} (\Gamma_{6655}^{1z} + \Gamma_{2645}^{1z}) \\
& + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} (\Gamma_{1245}^{1z} + \Gamma_{6645}^{1z} + 2\Gamma_{1655}^{1z} - J_{31}^z) \\
& + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} (\Gamma_{1145}^{2z} + \Gamma_{1644}^{2z}) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} (\Gamma_{6645}^{2z} + \Gamma_{2644}^{2z} - J_{32}^z) \\
& + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} (\Gamma_{1244}^{2z} + \Gamma_{6644}^{2z} + 2\Gamma_{1645}^{2z} - J_{12}^z) \\
& - B_1 \frac{\partial p}{\partial x} - B_3 \frac{\partial p}{\partial y} = (J_1(h/2) - J_1(-h/2))\phi
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
& - [D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}] \\
& + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} (\Gamma_{1655}^{1z} + \Gamma_{6645}^{1z} - J_{31}^z) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} (\Gamma_{2655}^{1z} + \Gamma_{2245}^{1z}) \\
& + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} (\Gamma_{1255}^{1z} + \Gamma_{6655}^{1z} + 2\Gamma_{2645}^{1z} - J_{21}^z) \\
& + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} (\Gamma_{1645}^{2z} + \Gamma_{6644}^{2z} - J_{22}^z) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} (\Gamma_{2645}^{2z} + \Gamma_{2244}^{2z}) \\
& + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} (\Gamma_{1245}^{2z} + \Gamma_{6645}^{2z} + 2\Gamma_{2644}^{2z} - J_{32}^z) \\
& - B_2 \frac{\partial p}{\partial x} - B_3 \frac{\partial p}{\partial y} = (J_2(h/2) - J_2(-h/2))\psi
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (J_1(h/2) - J_2(-h/2)) + \frac{\partial \psi}{\partial y} (J_2(h/2) - J_2(-h/2)) = -p(x, y) \tag{4.22}$$

Où les notations suivantes ont été introduites :

$$\begin{aligned}
(B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (z, z^2) C_{ij} dz & B_i &= \int_{-h/2}^{h/2} z C_i dz \\
(J_{ij}, J_{ij}^z) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z) C_i J_j(z) dz \\
(\Gamma_{ijmn}^1, \Gamma_{ijmn}^{1z}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z) C_{ij} \Gamma_{mn}^1 dz \\
(\Gamma_{ijmn}^2, \Gamma_{ijmn}^{2z}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z) C_{ij} \Gamma_{mn}^2 dz \\
C_{11} &= \frac{a_{22}a_{66} - a_{66}^2}{\lambda} & C_{12} &= \frac{a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}}{\lambda} \\
C_{22} &= \frac{a_{11}a_{66} - a_{16}^2}{\lambda} & C_{16} &= \frac{a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16}}{\lambda} \\
C_{26} &= \frac{a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}}{\lambda} & C_{66} &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\lambda} \\
C_{44} &= \frac{a_{55}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} & C_{45} &= \frac{a_{45}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \\
C_{55} &= \frac{a_{44}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \\
\lambda &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)a_{66} + 2a_{12}a_{16}a_{26} - a_{11}a_{26}^2 - a_{22}a_{16}^2 \\
C_1 &= C_{11}a_{13} + C_{12}a_{23} + C_{16}a_{36} \\
C_2 &= C_{12}a_{13} + C_{22}a_{23} + C_{26}a_{36} \\
C_3 &= C_{16}a_{13} + C_{26}a_{23} + C_{66}a_{36}
\end{aligned}$$

4.2 Construction de la fonction de Green

Dans la partie précédente, nous avons introduit deux fonctions f_1 et f_2 qui caractérisent la variation des contraintes de cisaillement interlaminaire τ_{xz} et τ_{yz} à travers

l'épaisseur de la pièce. Il est impératif que le choix de ces fonctions représente de manière adéquate les déformations de cisaillement ϵ_{xz} et ϵ_{yz} . L'analyse de différentes solutions des plaques minces soumises à de la flexion, [94-95], montrent que les contraintes de cisaillement interlaminaire varient approximativement à travers l'épaisseur de la plaque suivant une forme quadratique. Donc, on peut adopter pour ces deux fonctions f_1 et f_2 la forme suivante :

$$f_1(z) = f_2(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \quad (4.23)$$

Si maintenant, nous posons l'hypothèse (3), c'est-à-dire que la plaque est un stratifié symétrique, le système d'équations différentielles 4.20 à 4.22 se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned} & -[D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}] \\ & + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\Gamma_{1155}^{1z} + \Gamma_{1645}^{1z} - J_{11}^z) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(\Gamma_{6655}^{1z} + \Gamma_{2645}^{1z}) \\ & + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(\Gamma_{1245}^{1z} + \Gamma_{6645}^{1z} + 2\Gamma_{1655}^{1z} - J_{31}^z) \\ & + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(\Gamma_{1145}^{2z} + \Gamma_{1644}^{2z}) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(\Gamma_{6645}^{2z} + \Gamma_{2644}^{2z} - J_{32}^z) \\ & + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(\Gamma_{1244}^{2z} + \Gamma_{6644}^{2z} + 2\Gamma_{1645}^{2z} - J_{12}^z) = (J_1(h/2) - J_1(-h/2))\phi \quad (4.24) \end{aligned}$$

$$-[D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} (\Gamma_{1655}^{1z} + \Gamma_{6645}^{1z} - J_{31}^z) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} (\Gamma_{2655}^{1z} + \Gamma_{2245}^{1z}) \\
& + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} (\Gamma_{1255}^{1z} + \Gamma_{6655}^{1z} + 2\Gamma_{2645}^{1z} - J_{21}^z) \\
& + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} (\Gamma_{1645}^{2z} + \Gamma_{6644}^{2z} - J_{22}^z) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} (\Gamma_{2645}^{2z} + \Gamma_{2244}^{2z}) \\
& + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} (\Gamma_{1245}^{2z} + \Gamma_{6645}^{2z} + 2\Gamma_{2644}^{2z} - J_{32}^z) = (J_2(h/2) - J_2(-h/2))\psi \quad (4.25)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (J_1(h/2) - J_2(-h/2)) + \frac{\partial \psi}{\partial y} (J_2(h/2) - J_2(-h/2)) = -p(x, y) \quad (4.26)$$

Les conditions aux limites d'une plaque simplement supportée seront satisfaites si la solution du système précédent, équations 4.24 à 4.26 est représentée par les doubles séries de Fourier suivantes :

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.27)$$

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.28)$$

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.29)$$

Pour déterminer les trois inconnues w_{mn} , ϕ_{mn} et ψ_{mn} , la pression de contact $p(x, y)$ est aussi exprimée sous forme de double série de Fourier :

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.30)$$

Où p_{mn} est donné par l'expression suivante :

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(r, s) \cos\left(\frac{m\pi r}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi s}{b}\right) \quad (4.31)$$

En remplaçant les fonctions w , ϕ , ψ et p par leur expressions données respectivement par les équations 4.27 à 4.29 et en les injectant dans le système d'équations différentielles 4.24 - 4.26, on en déduit alors par identifications des coefficients des fonctions trigonométriques homologues le résultat suivant :

$$w_{mn} = \Delta_{1mn} p_{mn} \quad (4.32)$$

$$\phi_{mn} = \Delta_{2mn} p_{mn} \quad (4.33)$$

$$\psi_{mn} = \Delta_{3mn} p_{mn} \quad (4.34)$$

Où les notations suivantes ont été introduites :

$$\begin{aligned} \Delta_{3mn} &= \frac{\alpha_{22}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})}{\alpha_{32}[\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{22} + \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}]} \\ \Delta_{2mn} &= \Delta_{3mn} \left(\frac{\alpha_{41}\alpha_{53} - \alpha_{43}\alpha_{51}}{\alpha_{42}\alpha_{51} - \alpha_{41}\alpha_{52}} \right) \\ \Delta_{1mn} &= -\Delta_{3mn} \delta \\ \delta &= \left[\frac{\alpha_{42}(\alpha_{41}\alpha_{53} - \alpha_{43}\alpha_{51})}{\alpha_{41}(\alpha_{42}\alpha_{51} - \alpha_{41}\alpha_{52})} + \frac{\alpha_{43}}{\alpha_{41}} \right] \\ \alpha_{11} &= [D_{11}q_m^3 + (D_{12} + 2D_{66})q_m q_n^2] \\ \alpha_{12} &= [\Gamma_{1155}^{1z} + \Gamma_{1645}^{1z} - J_{11}]q_m^2 + [\Gamma_{2645}^{1z} + \Gamma_{6655}^{1z}]q_n^2 + [J_1(\frac{h}{2}) - J_1(\frac{-h}{2})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{13} &= [\Gamma_{1244}^{2z} + 2\Gamma_{1645}^{2z} + \Gamma_{6644}^{2z} - J_{12}]q_m q_n \\
\alpha_{21} &= [3D_{16}q_m^2 q_n + D_{26}q_n^3] \\
\alpha_{22} &= [\Gamma_{1245}^{1z} + 2\Gamma_{1655}^{1z} + \Gamma_{6645}^{1z} - J_{31}]q_m q_n \\
\alpha_{23} &= [\Gamma_{1145}^{2z} + \Gamma_{1644}^{2z}]q_m^2 + [\Gamma_{2644}^{2z} + \Gamma_{6645}^{2z}] - J_{32}]q_n^2 \\
\alpha_{32} &= [J_1(\frac{h}{2}) - J_1(\frac{-h}{2})]q_m \\
\alpha_{33} &= [J_2(\frac{h}{2}) - J_2(\frac{-h}{2})]q_n \\
\alpha_{41} &= [3D_{26}q_m q_n^2 + D_{16}q_m^3] \\
\alpha_{42} &= [\Gamma_{2245}^{1z} + \Gamma_{2655}^{1z}]q_n^2 + [\Gamma_{1655}^{1z} + \Gamma_{6645}^{2z} - J_{31}]q_m^2 \\
\alpha_{43} &= [\Gamma_{1245}^{2z} + 2\Gamma_{2644}^{2z} + \Gamma_{6645}^{2z} - J_{32}]q_m q_n \\
\alpha_{51} &= [D_{22}q_n^3 + (D_{12} + 2D_{66})q_m^2 q_n] \\
\alpha_{52} &= [\Gamma_{1255}^{1z} + 2\Gamma_{2645}^{1z} + \Gamma_{6655}^{1z} - J_{21}]q_m q_n \\
\alpha_{53} &= [\Gamma_{1645}^{2z} + \Gamma_{6644}^{2z} - J_{22}]q_m^2 + [\Gamma_{2244}^{2z} + \Gamma_{2645}^{2z}]q_n^2 + [J_2(\frac{h}{2}) - J_2(\frac{-h}{2})] \\
q_m &= \frac{m\pi}{a} \qquad \qquad \qquad q_n = \frac{n\pi}{b}
\end{aligned}$$

En reportant la valeur de p_{mn} donnée par l'équation 4.31 dans l'équation 4.32, on obtient l'expression suivante pour w_{mn} :

$$w_{mn} = \Delta_{1mn} \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(s, t) \cos(\frac{m\pi s}{a}) \cos(\frac{n\pi t}{b}) ds dt \quad (4.35)$$

En reportant cette valeur de w_{mn} dans l'équation 4.27, on arrive alors au résultat

suivant :

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Delta_{1mn} \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(s, t) \cos(\frac{m\pi s}{a}) \cos(\frac{n\pi t}{b}) ds dt] \cos(\frac{m\pi x}{a}) \cos(\frac{n\pi y}{b}) \quad (4.36)$$

Introduisons la fonction G dans l'expression précédente de w , nous pouvons alors écrire :

$$w = \int_0^a \int_0^b G(x, y, s, t) p(s, t) ds dt \quad (4.37)$$

Où G est défini comme suit :

$$G(x, y, s, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{1mn} \frac{4}{ab} \cos(\frac{m\pi s}{a}) \cos(\frac{n\pi t}{b}) \cos(\frac{m\pi x}{a}) \cos(\frac{n\pi y}{b}) \quad (4.38)$$

La fonction G n'est autre que la fonction de Green du problème tel qu'il est défini.

4.3 Formulation du problème du contact

Supposons un impacteur noté (1) se rapprochant d'une plaque cible notée (2). Après que les corps entrent en contact, des déplacements (u_1, v_1, w_1) et (u_2, v_2, w_2) seront induits dans chacun d'eux. La condition cinématique de non interférence peut être écrite comme suit :

$$[w_1(x, y) - w_1(x_0, y_0)] + [w_2(x, y) - w_2(x_0, y_0)] + [f_1(x, y) + f_2(x, y)] = 0 \quad \text{si } (x, y) \in \Omega \quad (4.39)$$

$$[w_1(x, y) - w_1(x_0, y_0)] + [w_2(x, y) - w_2(x_0, y_0)] + [f_1(x, y) + f_2(x, y)] > 0 \quad \text{sinon} \quad (4.40)$$

Où Ω est la surface de contact, w_1 et w_2 sont les déplacements en un point quelconque de la surface de contact de l'impacteur et la pièce respectivement ; (x_0, y_0) sont les coordonnées du premier point du contact, f_1 et f_2 sont des fonctions définissant les profils des surfaces entrant en contact de l'impacteur et la pièce respectivement. Si le cas d'un impacteur rigide est considéré, alors son déplacement relatif sera nul, (ie : $w_1(x, y) = w_1(x_0, y_0)$). L'indentation α est défini par : $\alpha = w_2(x_0, y_0) - w_2(r_{max})$ comme illustré dans la figure 4.2. Dans ces conditions, l'équation 4.39 peut être transformée comme suit :

$$\alpha = w_2(x, y) - w_2(r_{max}) + f_1(x, y) + f_2(x, y) \quad \text{si } (x, y) \in \Omega \quad (4.41)$$

où $w_2(r_{max})$ est le déplacement du dernier point de contact, voir figure 4.2. Pour une plaque, la fonction de profil $f_2 = 0$ et pour un impacteur sphérique, la fonction f_1 s'écrit comme suit :

$$f_1(x, y) = R - \sqrt{R^2 - r^2} \quad (4.42)$$

Où R est le rayon de la sphère et r est défini comme suit :

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (4.43)$$

La combinaison des équations 4.37 et 4.41 nous permet d'écrire finalement l'équation à résoudre :

$$\int_{\Omega} G'(x, y, s, t) p(s, t) ds dt = \alpha - R + \sqrt{R^2 - r^2} \quad (4.44)$$

$$p(x, y) < 0, \quad (x, y) \in \Omega$$

où G' est donnée par : $G'(x, y, s, t) = G(x, y, s, t) - G(x_{max}, y_{max}, s, t)$ et (x_{max}, y_{max})

sont les coordonnées du dernier point de contact, (ie : $r_{max} = \sqrt{(x_{max} - x_0)^2 + (y_{max} - y_0)^2}$).

4.4 Méthode de résolution

La solution exacte de l'équation 4.44 est difficile si ce n'est impossible à obtenir analytiquement suivant la présente formulation. Une procédure numérique est donc nécessaire. Les opérateurs dans cette équation doivent être discrétisés numériquement. La procédure employée est la suivante :

Étant donné que la pression et la surface de contact sont toutes les deux inconnues, alors on suppose une surface initiale suffisamment grande pour inclure la surface

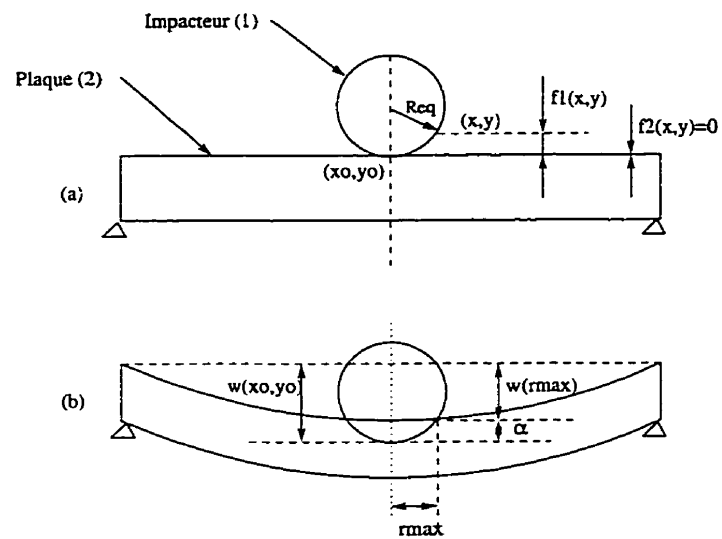


FIG. 4.2: Illustration des variables du contact, (a) Juste avant contact et (b) après contact

réelle de contact. Ensuite, cette surface est divisée en un nombre N d'éléments rectangulaires ayant chacun des dimensions ζ et η comme illustré à la figure 4.3.

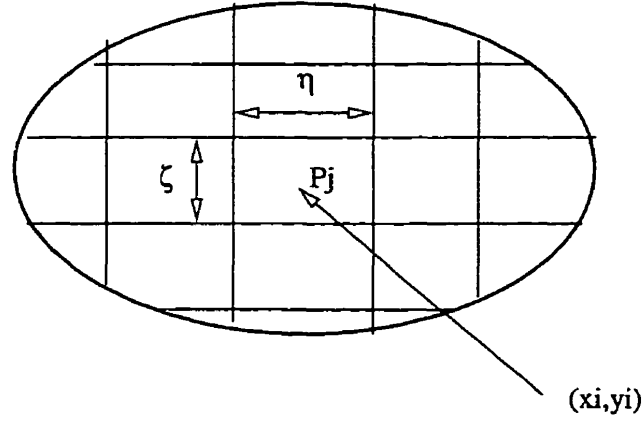


FIG. 4.3: Illustration de de la surface du contact discrétisée

En supposant que la pression de contact dans chacun de ces éléments est constante et en notant f_1 par f ainsi que G' par G alors l'équation 4.44 peut être écrite comme suit :

$$\alpha - f(x, y) = \sum_{j=1}^N p_j \int_{y_j - \frac{\eta}{2}}^{y_j + \frac{\eta}{2}} \int_{x_j - \frac{\zeta}{2}}^{x_j + \frac{\zeta}{2}} G(x, y, s, t) ds dt \quad (4.45)$$

Où (x_j, y_j) sont les coordonnées du centre du rectangle j et p_j est la pression au centre du même rectangle. L'intégration de l'équation 4.45 implique :

$$\alpha - f(x, y) = \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [K_{mn}(x, y) \cos(\frac{m\pi x_j}{a}) \cos(\frac{n\pi y_j}{b})] p_j \quad (4.46)$$

Où $K_{mn}(x, y)$ est donné par :

$$K_{mn}(x, y) = \frac{16}{\pi^2 mn} \Delta_{1mn} \sin\left(\frac{m\pi\zeta}{2a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\eta}{2b}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.47)$$

La résolution de l'équation 4.46 à N pressions p_j inconnues nécessite N équations indépendantes. Or la discrétisation induit des erreurs aléatoires. Il est donc plus intéressant de construire plus de N équations et ensuite minimiser l'erreur par la méthode des moindres carrés. Cette méthode est appelée méthode des champs de points redondants (RFP). Elle a été utilisée avec succès pour résoudre les problèmes de contact dans le cas du demi-espace isotrope, [101,102]. Lorsque les pressions p_j sont déterminées, la condition $p_j < 0$ est testée. Le point le plus éloigné où p_j est positif est écarté. La procédure est alors répétée jusqu'à ce que toutes les pressions calculées soient négatives.

Le système équivalent de l'équation 4.46 est le suivant :

$$T_{ij}P_j = F_i \quad (4.48)$$

Où T_{ij} est donné comme suit :

$$T_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_{mn}(x_i, y_i) \cos\left(\frac{m\pi x_j}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y_j}{b}\right) \quad (4.49)$$

et F_i est donné par l'expression suivante :

$$F_i = \alpha - f(x_i, y_i) \quad (4.50)$$

Le vecteur $\{P_j\}$ représente les pressions p_j inconnues à déterminer. Le carré de l'erreur est donné par l'équation suivante :

$$\epsilon^2 \equiv (T_{ij}P_j - F_i)(T_{ik}P_k - F_i) \quad (4.51)$$

La minimisation de l'erreur quadratique ϵ^2 donnée par l'équation 4.51 implique :

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial P_l} = 2T_{il}T_{ik}P_k - 2T_{il}F_i = 0 \quad (4.52)$$

La solution de l'équation 4.52 revient donc à résoudre le système linéaire suivant :

$$[T]^T [T] \{P\} = [T]^T \{F\} \quad (4.53)$$

Où $[T]^T$, $\{P\}$ et $\{F\}$ sont la matrice transposée de $[T]$, le vecteur pression $\{P_j\}$ et le vecteur position $\{F_i\}$ respectivement. Un programme en C a été développé pour résoudre ce système algébrique. Vu la dimension de la surface de contact, il peut en résulter des singularités numériques. Pour remédier à ce problème, nous avons utilisé une procédure assurant un très bon conditionnement des matrices en question. C'est la méthode dite (Syngular Value Decomposition, SVD), [103].

4.5 Prédiction et vérifications

Étant donné que la méthode de résolution est numérique, il est donc nécessaire de tester sa convergence. L'effet des paramètres influençant la réponse à savoir le nombre de termes de la série de Fourier et le nombre d'éléments constituant la surface initiale sont alors étudiés. Pour cela, une erreur relative est définie par $[F(N+1) - F(N)]/F(N)$, où $F(N)$ et $F(N+1)$ sont les forces calculées pour N et $(N+1)$ termes respectivement. Les figures 4.4 et 4.5 montrent qu'au-delà de 50 termes de la série de Fourier et 25 éléments de la surface initiale, la solution retournée demeure constante. On en déduit que la procédure est stable et convergente.

Dans le soucis de vérifier la validité de ce modèle, les prédictions sont comparées aux résultats donnés par la théorie de Hertz sur un matériau isotrope dont les propriétés sont les suivantes : ($E = 2 \text{ GPa}$, $\nu = 0.5$). La figure 4.6 montre une très bonne corrélation entre les prédictions et la théorie de Hertz pour deux impacteurs de diamètres différents. Une autre comparaison est faite avec les résultats expérimentaux établis par Tan et Sun, [16]. Les propriétés d'un pli orthotrope du matériau utilisé dans leur étude sont :

$$E_1 = 120 \text{ GPa}, E_2 = E_3 = 7.9 \text{ GPa}, G_{12} = G_{13} = 5.5 \text{ GPa}, \nu_{12} = \nu_{13} = 0.3$$

Où E_1 , E_2 et E_3 sont respectivement les modules d'Young longitudinal, transverse et dans la direction de l'épaisseur du pli ; G_{12} et G_{13} sont les coefficients de cisaillement plan et transverse du pli ; ν_{12} et ν_{13} sont les coefficients de Poisson plan et trans-

verse du pli. Dans l'étude de Tan et Sun, le coefficient de Poisson ν_{23} ainsi que le module de cisaillement G_{23} n'ont pas été spécifiés. Nous avons alors choisi pour ν_{23} une valeur de 0.3 qui est une valeur raisonnable pour le type de matériau qu'ils ont utilisé : (graphite/epoxy), [17]. Pour le coefficient de cisaillement G_{23} , nous l'avons calculé en utilisant la relation suivante : $G_{23} = E_3/(2(1 + \nu_{23}))$, [17]. Cette relation suppose que le pli est considéré comme transversalement isotrope par rapport aux directions 2 et 3. Cela donne une valeur de $G_{23} = 3.04 \text{ GPa}$. La séquence d'empilement de leur matériau est la suivante : $[0/45/0/-45/0]_{2s}$.

La figure 4.7 montre bien que les prédictions du modèle sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux, alors que le modèle de Yang et Sun s'avère diverger surtout lorsque l'indentation augmente. Par conséquent, nous pouvons conclure que notre approche est réaliste et peut donc être utilisée pour explorer le problème du contact des plaques composites soumises à l'impact à faible énergie.

L'effet de certains paramètres sur la réponse des matériaux composites, en particulier la séquence d'empilement, l'épaisseur de la plaque et enfin les dimensions planes de la plaque ont été étudiés. Les propriétés du pli orthotrope du matériau simulé sont les suivantes : $E_1 = 120 \text{ GPa}$, $E_2 = E_3 = 7.9 \text{ GPa}$, $G_{12} = G_{13} = 5.5 \text{ GPa}$, $G_{23} = 3.04 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.3$

Pour voir l'effet de la séquence d'empilement, les dimensions planes de la plaque sont maintenues constantes et ont les valeurs suivantes : $127 \times 127 \times 2.7 \text{ mm}^3$. Les séquences

étudiées sont : $[0/\theta]_{5s}$ pour des valeurs de ($\theta = 0, 15, 30, 45, 60, 75$ et 90°). La figure 4.8 montre bien que la séquence d'empilement est sans effet sur la relation $(F - \alpha)$. Un autre paramètre important est l'effet de l'épaisseur du stratifié. La figure 4.9 montre que contrairement à la séquence d'empilement, l'épaisseur joue un rôle important dans la réponse de la plaque. Pour la même force de contact, l'indentation α augmente avec l'épaisseur. Au-delà d'une certaine épaisseur, la réponse se stabilise et tend vers les prédictions de la théorie de Hertz modifiée. Ce n'est pas surprenant, puisque lorsque l'épaisseur augmente, le problème du contact est très localisé et l'hypothèse du demi-espace devient justifiée. Par contre, ce qui semble un paradoxe, c'est que les deux paramètres, l'épaisseur et la séquence d'empilement affectent la rigidité globale du matériau. Malgré que ce résultat est confirmé dans la littérature [19,23], aucune interprétation n'est donnée. Une réponse précise à cette question nécessite d'explicitier la relation liant la force F et l'indentation α . Or cela est pratiquement impossible pour des pièces en composite stratifié et de dimensions finies. Si la séquence d'empilement avait un effet semblable à celui de l'épaisseur, alors on pourrait associer leurs effets sur la relation $(F - \alpha)$ à la variation de la rigidité globale de la plaque. Nous proposons l'explication suivante à ce paradoxe. Rappelons la définition de l'indentation α , soit :

$$\alpha = w(x_0, y_0) - w(x_{max}, y_{max}) \quad (4.54)$$

où $w(x_0, y_0)$ et $w(x_{max}, y_{max})$ sont les déplacements du premier et du dernier point de contact. Le matériau manifeste un comportement linéaire élastique jusqu'à l'EDC, donc on peut écrire pour un point quelconque de la plaque la relation suivante :

$$w(x, y) = \frac{F}{K(x, y)} \quad (4.55)$$

où $w(x, y)$ est le déplacement d'un point quelconque de la plaque, $K(x, y)$ est la rigidité globale en ce point et F est la force de contact.

En combinant les équations 4.54 et 4.55, on peut écrire la relation suivante :

$$\alpha = F \left[\frac{1}{K(x_0, y_0)} - \frac{1}{K(x_{max}, y_{max})} \right] \quad (4.56)$$

Posons $S(x_0, y_0) = \frac{1}{K(x_0, y_0)}$ et $S(x_{max}, y_{max}) = \frac{1}{K(x_{max}, y_{max})}$. Où $S(x_0, y_0)$ et $S(x_{max}, y_{max})$ sont les souplesses globales aux points de coordonnées (x_0, y_0) et (x_{max}, y_{max}) respectivement. L'équation 4.56 peut alors être écrite sous la forme suivante :

$$\alpha = F[S(x_0, y_0) - S(x_{max}, y_{max})] \quad (4.57)$$

Considérons d'abord le cas de l'épaisseur de la plaque. Lorsqu'on augmente l'épaisseur de la plaque de h_0 à h , la rigidité globale de celle-ci augmente avec le cube de h/h_0 c'est-à-dire :

$$S_h(x, y) = S_{h_0}(x, y) \left[\frac{h_0^3}{h^3} \right] \quad (4.58)$$

où $S_h(x, y)$ et $S_{h_0}(x, y)$ sont les souplesses au point de coordonnées (x, y) pour les plaques d'épaisseur h et h_0 respectivement. En introduisant cette expression de la souplesse dans l'équation 4.57, on peut écrire l'équation suivante :

$$\alpha_h = F \left[S_{h_0}(x_0, y_0) \frac{h_0^3}{h^3} - S_{h_0}(x_{max}, y_{max}) \frac{h_0^3}{h^3} \right] = \left[\frac{h_0^3}{h^3} \right] \alpha_{h_0} \quad (4.59)$$

L'équation précédente montre qu'il est impossible d'avoir la même indentation pour deux épaisseurs différentes h_0 et h . L'égalité ne peut être satisfaite que pour $h = h_0$.

Prenons maintenant le cas de la séquence d'empilement. Notons par les indices seq_0 et seq une séquence d'empilement de référence et une autre quelconque. L'équation 4.57 donne pour une séquence d'empilement quelconque seq la relation suivante pour α :

$$\alpha_{seq} = F[S_{seq}(x_0, y_0) - S_{seq}(x_{max}, y_{max})] \quad (4.60)$$

Pour que les deux séquences d'empilement seq_0 et seq aient la même indentation pour la même force F , il faut que la condition suivante soit satisfaite :

$$S_{seq}(x_0, y_0) - S_{seq}(x_{max}, y_{max}) = S_{seq_0}(x_0, y_0) - S_{seq_0}(x_{max}, y_{max}) \quad (4.61)$$

Pour donner une signification physique à l'équation 4.61, nous procédons de la façon suivante : Supposons que la variation de la souplesse $S_{seq}(x, y)$ en fonction de la séquence d'empilement peut être représentée par une fonction quelconque comme illustrée par la figure 4.10. Si maintenant on considère les points de coordonnées (x_0, y_0) et (x_{max}, y_{max}) , (ie : premier et dernier point du contact), les deux courbes ne peuvent qu'être parallèles, voir figure 4.11. Si les deux courbes ne sont pas parallèles, il s'en suit que l'effet de la séquence d'empilement ne sera plus uniforme pour tous les points de la plaque et que son effet dépend de la position du point. Autrement dit, en faisant varier la séquence d'empilement, on peut augmenter la souplesse dans certains points de la plaque et au contraire la réduire dans d'autres. Il s'agit donc d'une situation impossible et par conséquent les courbes de variation de la souplesse en fonction de la séquence d'empilement ne peuvent qu'être parallèles. Cela implique que la relation suivante doit être satisfaite pour toute séquence d'empilement :

$$S_{seq}(x_0, y_0) - S_{seq}(x_{max}, y_{max}) = \text{constante} \quad (4.62)$$

D'où l'on tire que pour la même force, l'équation 4.61 est vérifiée et par conséquent la séquence d'empilement n'a pas d'effet sur la relation $(F - \alpha)$ même si elle agit sur

la rigidité globale. Un autre paramètre est représenté par les dimensions planes de la plaque. La figure 4.12 montre que son effet peut être négligé. Ce résultat semble raisonnable puisque l'impact se fait dans la direction transversale. Les propriétés planes affectent moins la réponse de la plaque localement.

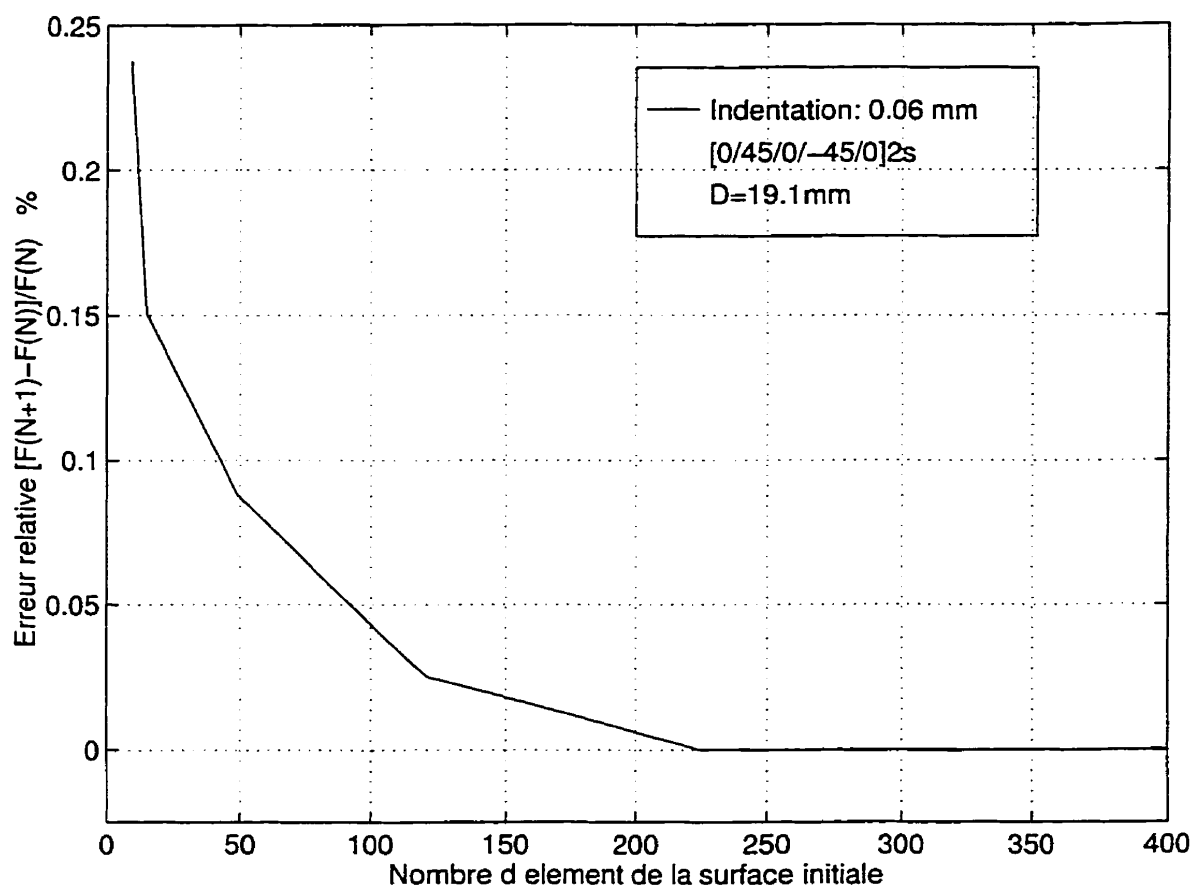


FIG. 4.4: Effet du nombre d'éléments de la surface initiale sur la convergence

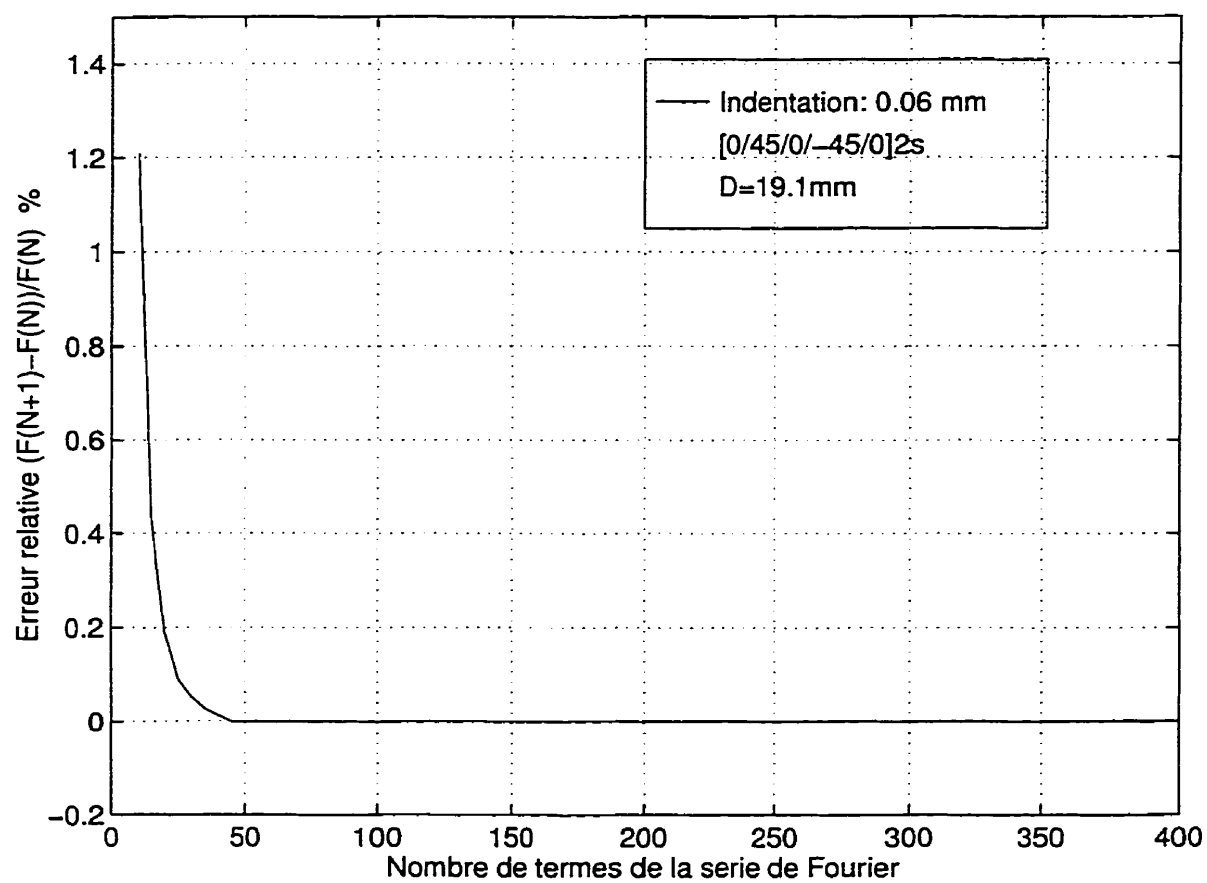


FIG. 4.5: Effet du nombre de termes de la série de Fourier sur la convergence

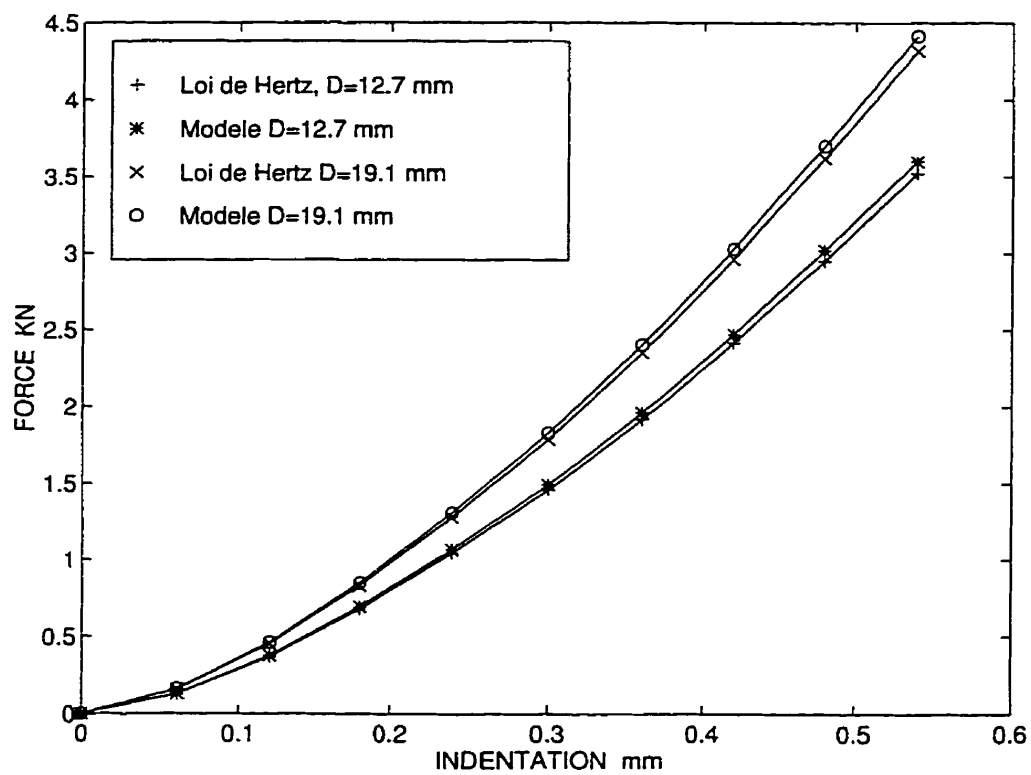


FIG. 4.6: Comparaison avec les résultats de la relation de Hertz

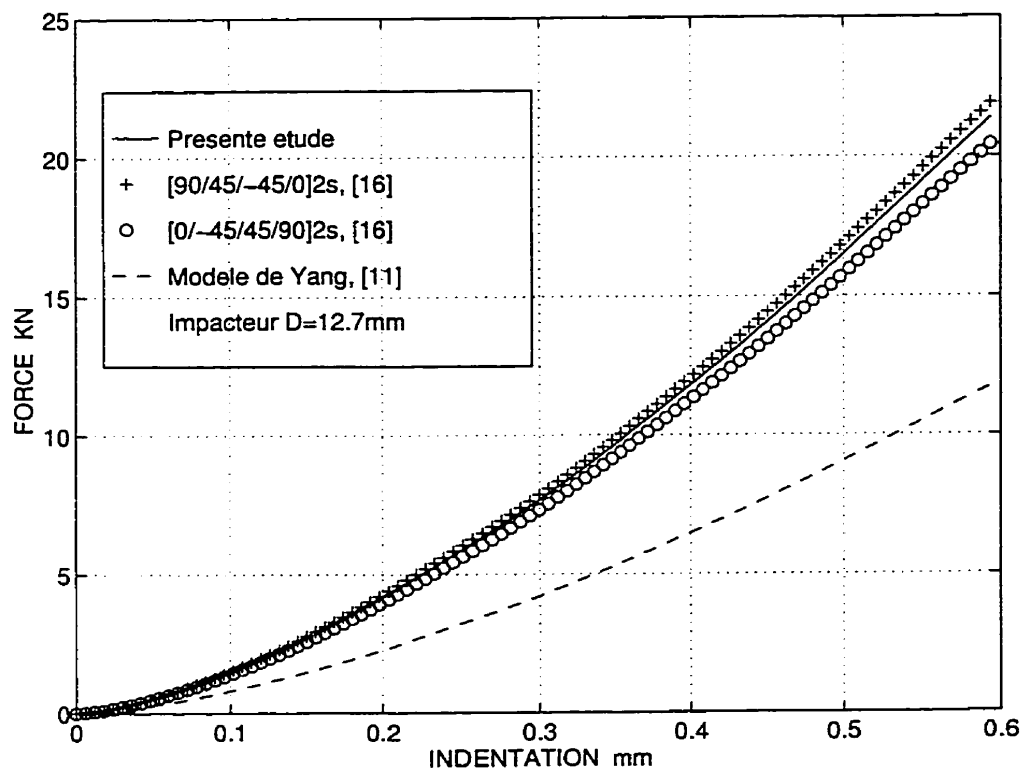


FIG. 4.7: Comparaison avec les résultats de Tan et al, [16]

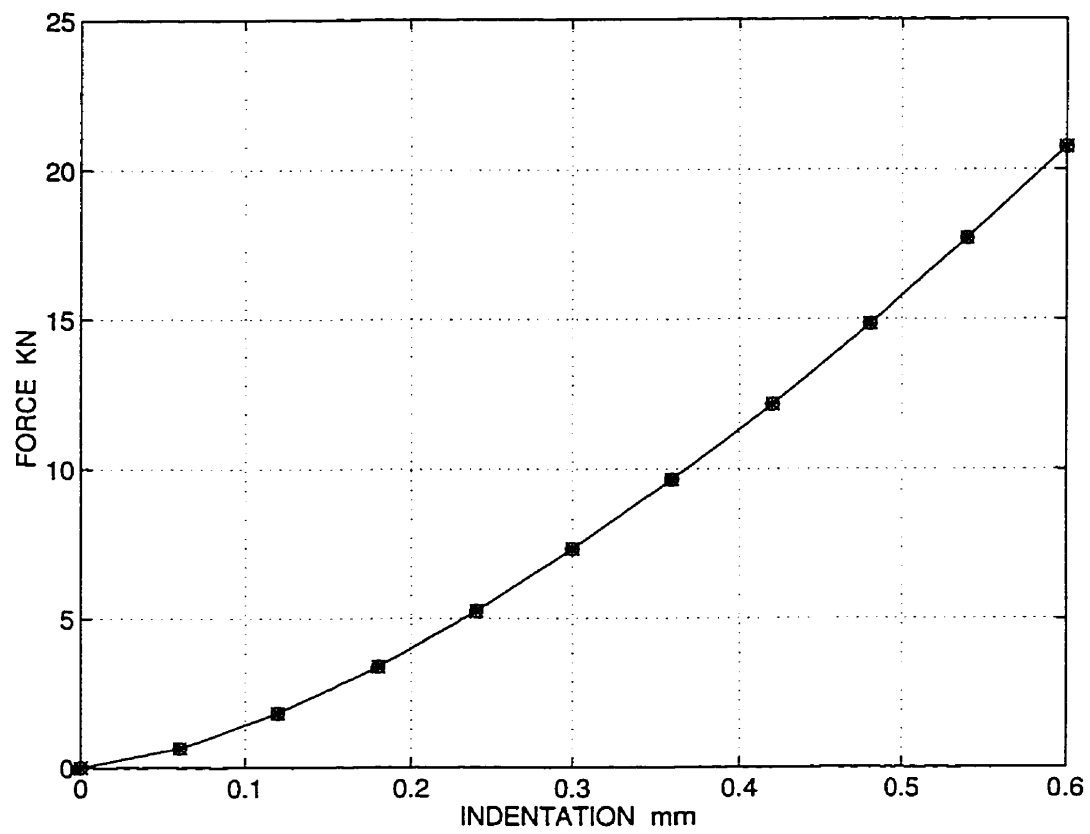


FIG. 4.8: Effet de la séquence d'empilement sur la force de contact, $[0/\theta]_{5s}$, $\theta = 0, 15, \dots, 75, 90^\circ$, $D=12.7$ mm

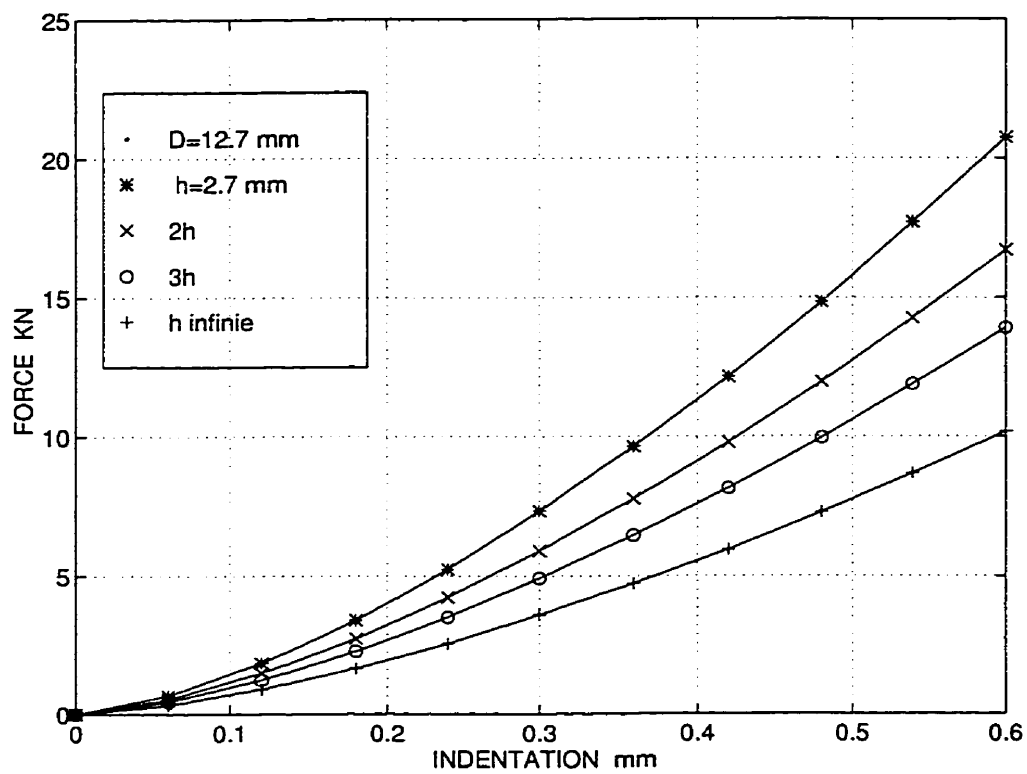


FIG. 4.9: Effet de l'épaisseur sur la force de contact, $D = 12.7$ mm

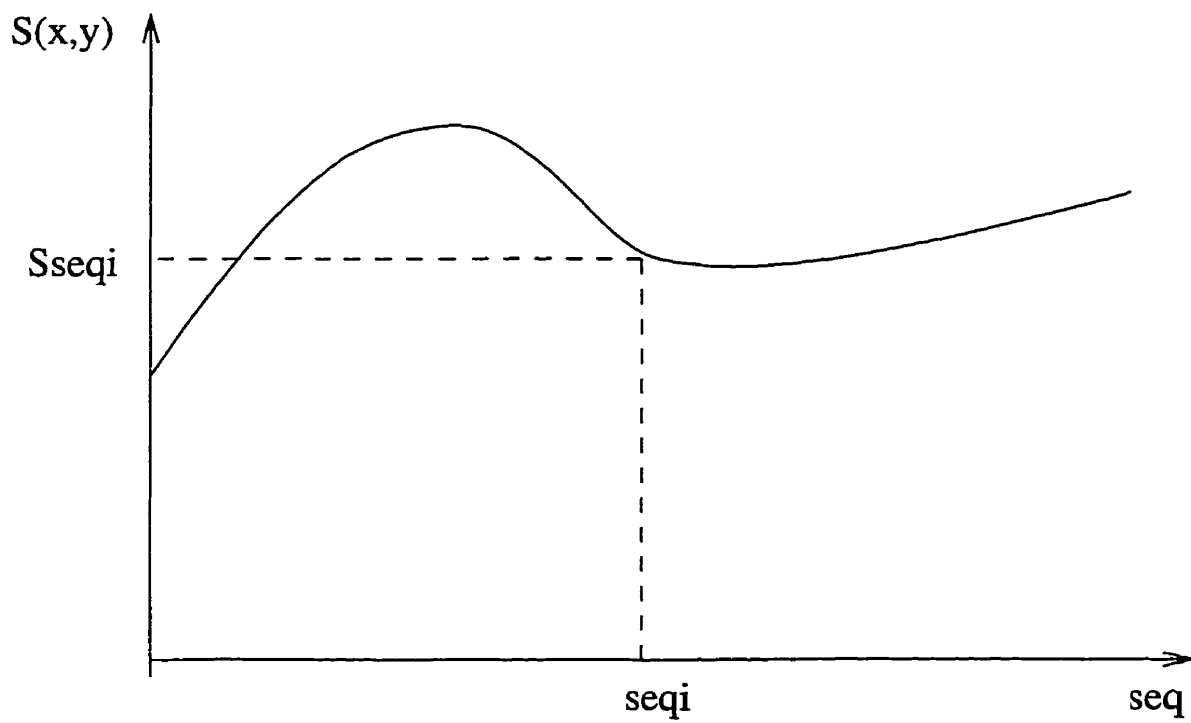


FIG. 4.10: Schématisation de la variation de la souplesse en fonction de la séquence d'empilement

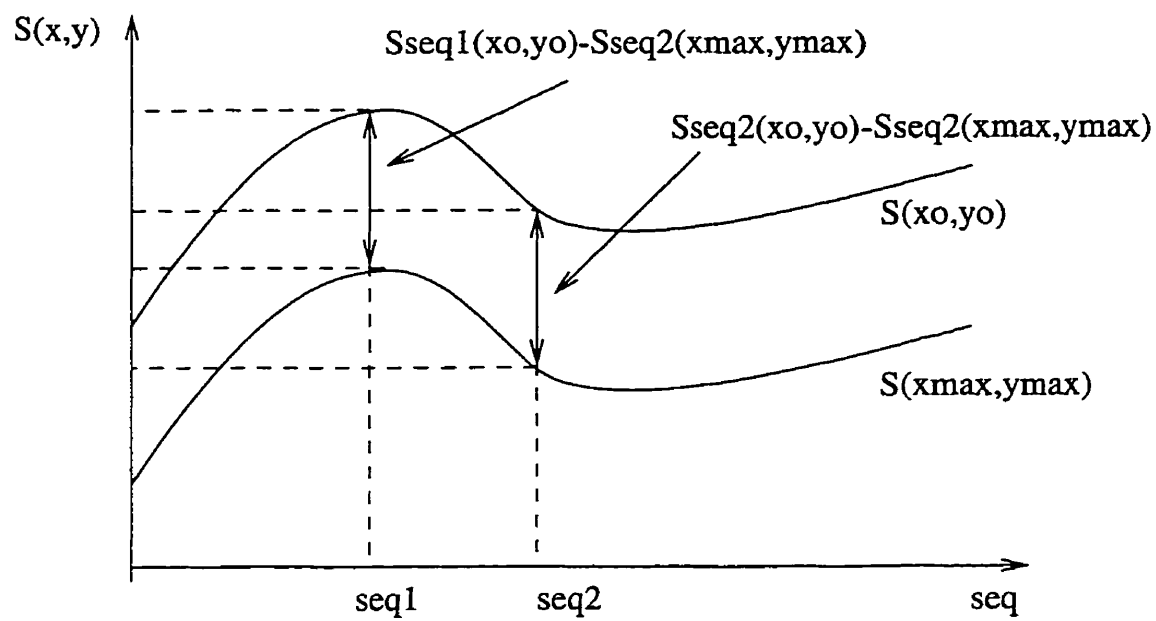


FIG. 4.11: Illustration de l'effet de la séquence d'empilement sur la souplesse aux points (x_0, y_0) et (x_{max}, y_{max})

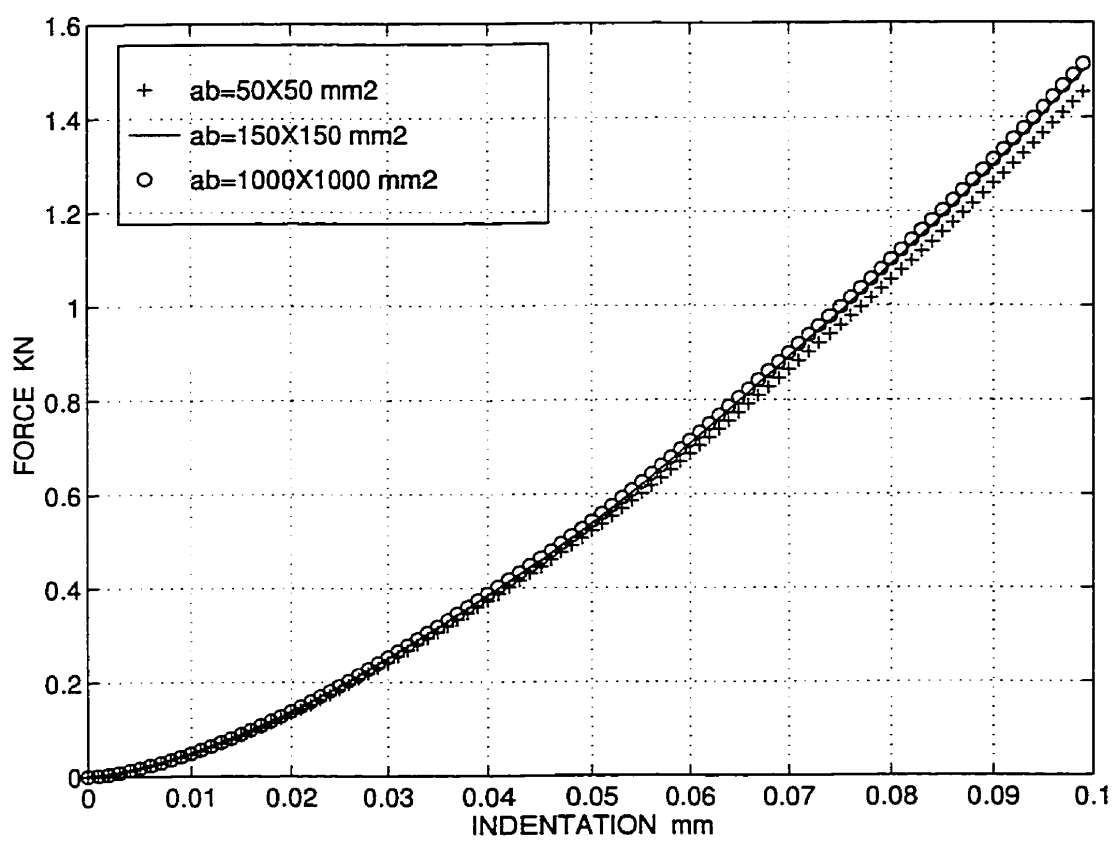


FIG. 4.12: Effet des dimensions planes sur la force de contact

Chapitre 5

Prédiction de l'état du dommage critique

5.1 Détermination de la force critique F_C

5.1.1 Formulation du problème

Comme il peut être constaté au chapitre IV, la formulation du problème est basée sur la réponse globale de la plaque combinée aux deux conditions cinématique et mécanique du contact. La réponse globale est déterminée par l'application de la théorie de l'élasticité anisotrope d'ordre supérieur. Les deux conditions de contact sont la non interférence des surfaces en contact et la pression du contact qui doit être négative. La seule différence entre la formulation du présent chapitre et le précédent

réside dans le fait que pour le cas précédent, le problème est résolu pour la relation force-indentation ($F - \alpha$) alors que dans ce cas, il s'agit plutôt de déterminer la variation de la force avec le déplacement du premier point du contact ($F - w_0$). L'impacteur peut avoir un profil quelconque, pourvu que sa partie qui entre en contact puisse être approximée par une surface à deux courbures constantes. La condition cinématique de non interférence peut être écrite comme suit :

$$w_1(x_0, y_0) - w_1(x, y) + f_1(x, y) + w_2(x_0, y_0) + w_2(x, y) + f_2(x, y) = 0 \quad (5.1)$$

où $w_1(x, y)$ et $w_2(x, y)$ sont les déplacements en un point quelconque de la surface de contact de l'impacteur et la plaque respectivement. (x_0, y_0) sont les coordonnées du premier point de contact. $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ sont des fonctions définissant les profils de la plaque et l'impacteur respectivement.

La fonction $f(x, y)$ a pour expression dans le cas général :

$$f(x, y) + R_{eq} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{R_{eq}^2}} \right] = 0 \quad (5.2)$$

où R_{eq} est le rayon équivalent au point de contact de coordonnées (x, y) , comme illustré à la figure 5.1.

Dans le cas d'une plaque (Plan : $R_{eq} = \infty$), la fonction $f(x, y)$ s'annule. En plus, si l'impacteur est rigide, alors le champ des déplacements w_1 est une translation, d'où $w_1(x_0, y_0) - w_1(x, y) = 0$. Par conséquent, l'équation 5.1 se ramène à :

$$f_1(x, y) + w_2(x_0, y_0) - w_2(x, y) = 0 \quad (5.3)$$

Or le déplacement $w_2(x, y)$ en un point quelconque de la plaque est lié à la pression de contact $p(x, y)$ par la fonction de Green G comme suit :

$$w_2(x, y) = \int_0^a \int_0^b G(x, y, s, t) p(s, t) ds dt \quad (5.4)$$

où a et b sont les dimensions planes de la plaque. La fonction de Green $G(x, y, s, t)$ est déjà déterminée au chapitre IV, voir l'équation 4.38. Le problème revient donc à résoudre l'équation suivante :

$$\int_0^a \int_0^b G(x, y, s, t) p(s, t) ds dt = w_0 - R_{eq} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{R_{eq}^2}} \right] \quad (5.5)$$

où w_0 est le déplacement du premier point de contact. Si on compare l'équation de base à résoudre dans chacun des deux cas, (ie : éqs. 4.44 et 5.5), on peut dire que ces deux équations sont identiques du point de vue mathématique. Cependant, dans l'équation 4.44, l'indentation α est imposée comme donnée du problème. Or α dépend des déplacements en deux points (x_0, y_0) et (x_{max}, y_{max}) . Il est à noter qu'on ne peut pas imposer simultanément les valeurs des déplacements de ces deux points. Dans le cas contraire, l'un des déplacements devient une contrainte au problème et l'équilibre naturel de la plaque soumise uniquement à une force de contact sera violé.

Par contre, par le fait d'imposer leur différence α , le problème ne se pose plus puisque l'indentation α est une fonction continue de la force et pour toute indentation, il existe une force unique lui donnant naissance. Dans le cas de la relation $(F - w_0)$, le problème ne se pose pas et pour tout déplacement imposé, la solution du problème existe et elle est unique.

5.1.2 Méthode de résolution

Comme dans le cas du chapitre IV, la solution analytique de l'équation 5.5 est pratiquement impossible à obtenir suivant la présente formulation. Une procédure numérique est alors nécessaire. La méthode utilisée est identique à celle présentée au chapitre IV. Une surface de contact relativement large est initialement supposée. Cette surface est ensuite subdivisée en un nombre N d'éléments rectangulaires de dimensions ζ et η . Dans chacun de ces éléments, une pression p_j est considérée. Dans ces conditions, l'équation 5.5 peut être intégrée facilement sous l'expression suivante :

$$\sum_{j=1}^N p_j \int_{y_j - \frac{\eta}{2}}^{y_j + \frac{\eta}{2}} \int_{x_j - \frac{\zeta}{2}}^{x_j + \frac{\zeta}{2}} G(x, y, s, t) p(s, t) ds dt = w_0 - R_{eq} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{R_{eq}^2}} \right] \quad (5.6)$$

où (x_j, y_j) sont les coordonnées du centre du rectangle j dans lequel la pression p_j est appliquée. En introduisant dans l'équation 5.6 l'expression de la fonction de Green, (voir chapitre IV, éq. 4.38), et l'intégrant, on obtient la relation suivante avec

$(x_0 = y_0 = 0)$, (ie : origine du repère au centre de la surface de contact) :

$$\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [K_{mn}(x, y) \cos(\frac{m\pi x_j}{a}) \cos(\frac{n\pi y_j}{b})] p_j = w_0 - R_{eq} [1 - \sqrt{1 - \frac{(x^2 + y^2)}{R_{eq}^2}}] \quad (5.7)$$

où l'expression de $K_{mn}(x, y)$ est donnée par l'équation 4.47 au chapitre IV. La résolution de l'équation 5.7 à N inconnues, p_j , nécessite N équations indépendantes. Dans le but de réduire les erreurs induites par la discrétisation, on construit $2N$ équations et la solution est donnée par la minimisation de l'erreur quadratique. C'est la méthode des champs de points redondants (RFP) déjà utilisée au chapitre IV. Le système linéaire correspondant s'écrit :

$$[A]^T [A] \{P\} = [A]^T \{F\} \quad (5.8)$$

où $[A]^T$ est la matrice transposée de $[A]$ définie par :

$$A_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_{mn}(x_i, y_i) \cos(\frac{m\pi x_j}{a}) \cos(\frac{n\pi y_j}{b}) \quad (5.9)$$

$\{F\}$ est donné par :

$$F_i = w_0 - R_{eq} [1 - \sqrt{1 - \frac{(x_i^2 + y_i^2)}{R_{eq}^2}}] \quad (5.10)$$

$\{P\}$ est le vecteur des pressions p_j constituant les inconnues du problème.

Pour éviter des singularités numériques probables puisque la surface de contact est très faible, la méthode dite "singular value decomposition, (SVD)" est utilisée pour

résoudre le système défini par l'équation 5.8. La condition physique de contact (ie : $p_j < 0$) est testée en chaque élément de la surface de contact. Les points extrêmes où cette condition n'est pas vérifiée sont écartés. La procédure essentiellement itérative est répétée jusqu'à convergence vers une solution où la pression est partout négative ou nulle. La pression est ensuite intégrée sur la surface de contact pour déterminer la force de contact. La variation de la force en fonction du déplacement est alors obtenue en faisant varier le déplacement w_0 qui constitue une donnée du problème.

5.1.3 Prédiction et vérifications

Avant de vérifier la validité de l'approche proposée, il est impératif de connaître l'effet des paramètres dont dépend sa convergence à savoir le nombre de termes de la série de Fourier ainsi que la surface initiale supposée. La figure 5.2 montre bien que la solution se stabilise au delà de 15X15 termes de la série de Fourier. De même, la figure 5.3 montre bien la convergence de la solution à partir de 16 éléments.

Étant donné que la convergence ainsi que la stabilité de la solution sont maintenant vérifiées, on peut alors comparer les prédictions du modèle à des résultats expérimentaux. La figure 5.4 montre la comparaison de la variation de la force de contact en fonction du déplacement prédite par la présente étude et celle obtenue expérimentalement dans le chapitre III pour le stratifié (AS4/3501-6). On voit clairement une très bonne concordance entre les prédictions et les résultats expérimentaux.

On peut en conclure que notre approche est très fiable et peut être exploitée pour analyser le choc à faible énergie.

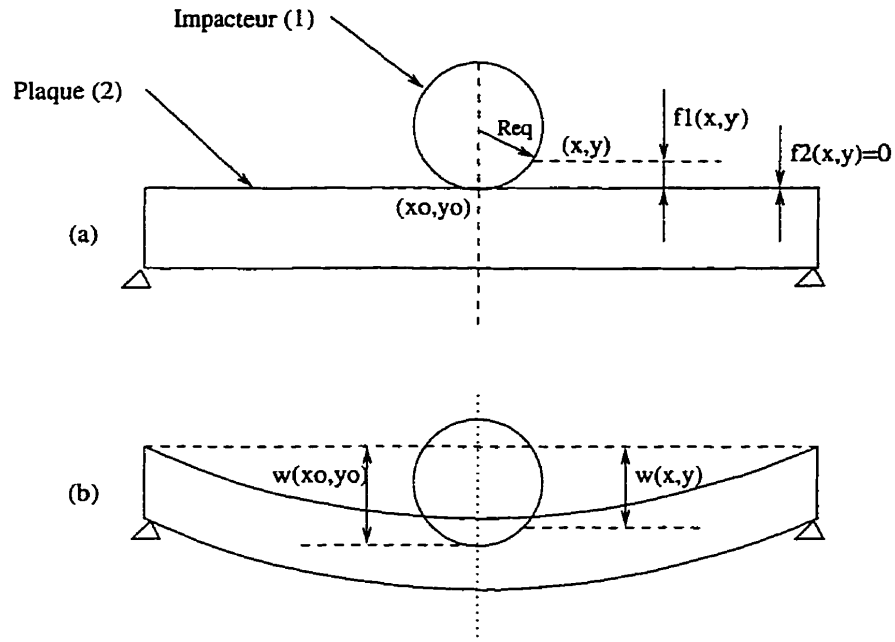


FIG. 5.1: Illustration des paramètres du contact, (a) : juste avant le contact, (b) : après contact

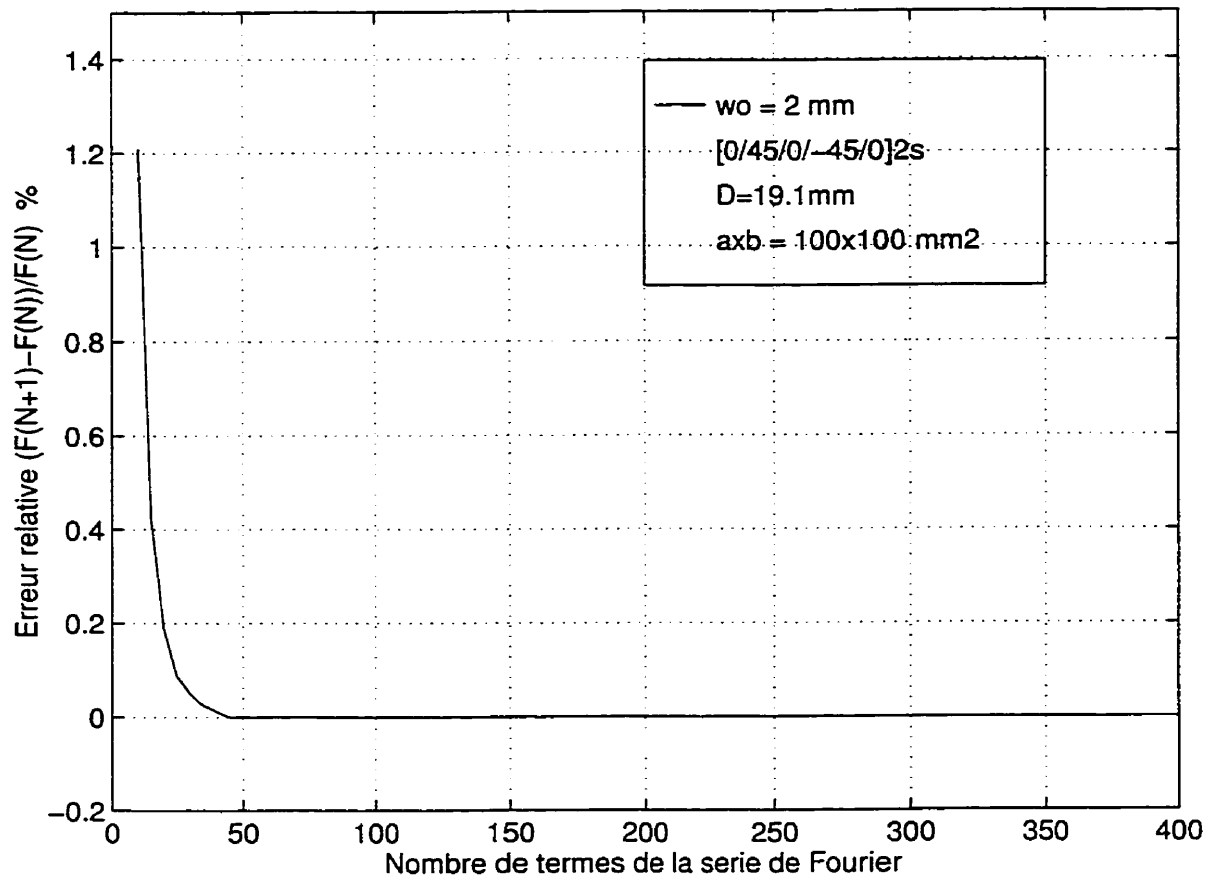


FIG. 5.2: Convergence de la solution en fonction du nombre de termes de la série de Fourier

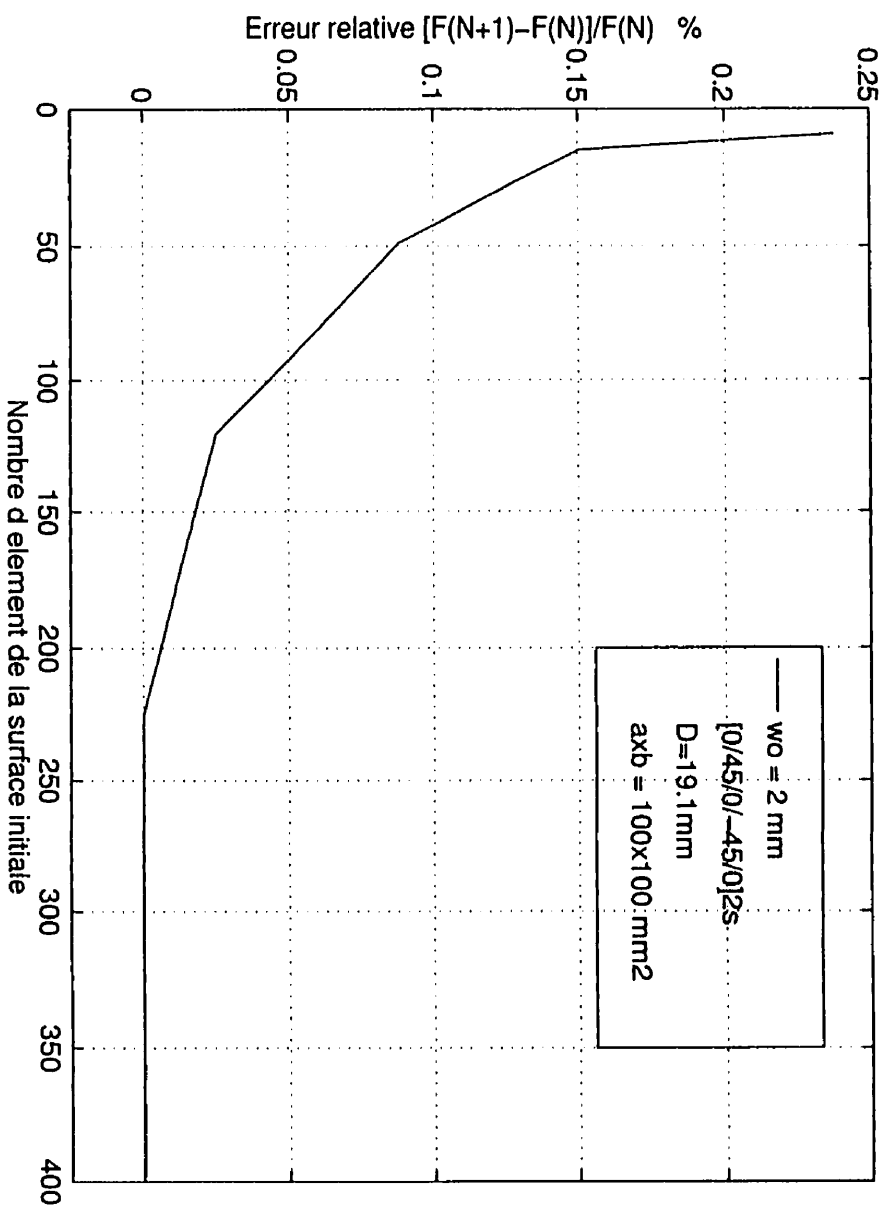


FIG. 5.3: Convergence de la solution en fonction du nombre d'éléments de la surface de contact

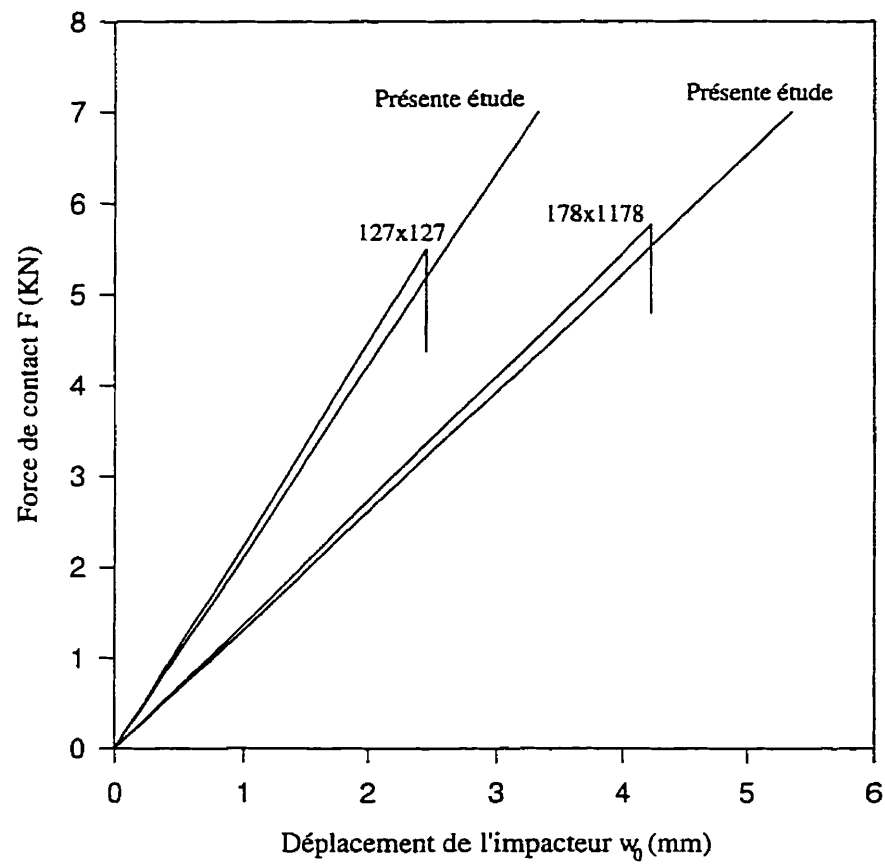


FIG. 5.4: Comparaison entre les prédictions du modèle et les résultats expérimentaux.

5.2 Extrapolation au choc simple

5.2.1 Énergie à l'état du dommage critique

Les résultats expérimentaux présentés au chapitre III montrent bien que pour le stratifié étudié (AS4/3501-6), la réponse au choc à faible énergie peut être déterminée de façon très satisfaisante par des essais quasi-statiques. Nous pouvons donc utiliser les prédictions de la présente étude pour explorer le problème du choc. L'objectif principal de ce paragraphe est de pouvoir estimer les paramètres importants à l'état du dommage critique EDC pour une plaque de dimensions quelconques à partir de la connaissance de la force critique F_C d'une éprouvette de dimensions connues, (ie : plaque de référence). La figure 5.5 présente la variation de $(F - w_0)$ pour différentes dimensions choisies comme exemple. Lors d'un impact sur une structure composite, la masse, la vitesse et le profil de l'impacteur sont en général connus. Il est alors intéressant de lier ces paramètres à l'état du dommage critique, (EDC). Si l'énergie de frottement et celle absorbée par le montage sont négligeables, alors l'énergie transmise à la plaque est exactement déterminée par la relation suivante :

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_0^{w_{0max}} Fwdw \quad (5.11)$$

où m , v_0 et w sont la masse, la vitesse juste avant le choc et le déplacement de l'impacteur respectivement.

F est la force de contact calculée par l'approche proposée.

w_{0max} est le déplacement du premier point de l'impact lorsque la vitesse de l'impacteur devient nulle, (ie : transmission totale de l'énergie à la plaque).

La figure 5.6 montre la variation de la force de contact en fonction de l'énergie pour différentes dimensions planes de la plaque. La force de contact F_C à l'état du dommage critique étant indépendante des dimensions planes, on peut alors écrire la relation suivante :

$$E_C = \frac{K_{0ref}}{K_0} E_{Cref} \quad (5.12)$$

où E_C est l'énergie critique d'une plaque de dimensions planes quelconques. E_{Cref} est l'énergie critique de la plaque de référence supposée connue. K_0 et K_{0ref} sont les rigidités au premier point de contact de la plaque de dimension quelconque et de la plaque de référence respectivement. Il est à noter que ces rigidités se déterminent facilement par l'approche proposée. On déduit aisément de l'équation 5.12, que l'énergie critique à l'EDC est une fonction croissante des dimensions planes de la plaque puisque la rigidité globale décroît avec les dimensions planes, voir figure 5.5. Dans le but de trouver un autre paramètre global indépendant des dimensions planes, nous avons comparé la variation de l'énergie normalisée par la surface exposée $\frac{E}{ab}$ en fonction de la force de contact pour différentes dimensions, où ab est la surface plane de la plaque. La figure 5.7 montre bien que le paramètre $\frac{E}{ab}$ est aussi une propriété du matériau.

à partir du résultat de la figure 5.7, on peut écrire, en particulier pour $F = F_C$, la relation suivante :

$$E_C = \frac{ab}{ab_{ref}} E_{Cref} \quad (5.13)$$

où $\frac{ab}{ab_{ref}}$ représente le rapport des surfaces exposées de la plaque de dimension $a \times b$ par celle de la plaque de référence $(a \times b)_{ref}$. L'énergie critique à l'EDC d'une plaque de dimensions quelconques peut alors être calculée par l'équation 5.13 connaissant celle d'une plaque de référence. L'énergie critique d'impact est alors donnée en égalisant l'expression de E_C donnée par l'équation 5.13 à l'énergie du choc, soit $\frac{1}{2}mv^2$.

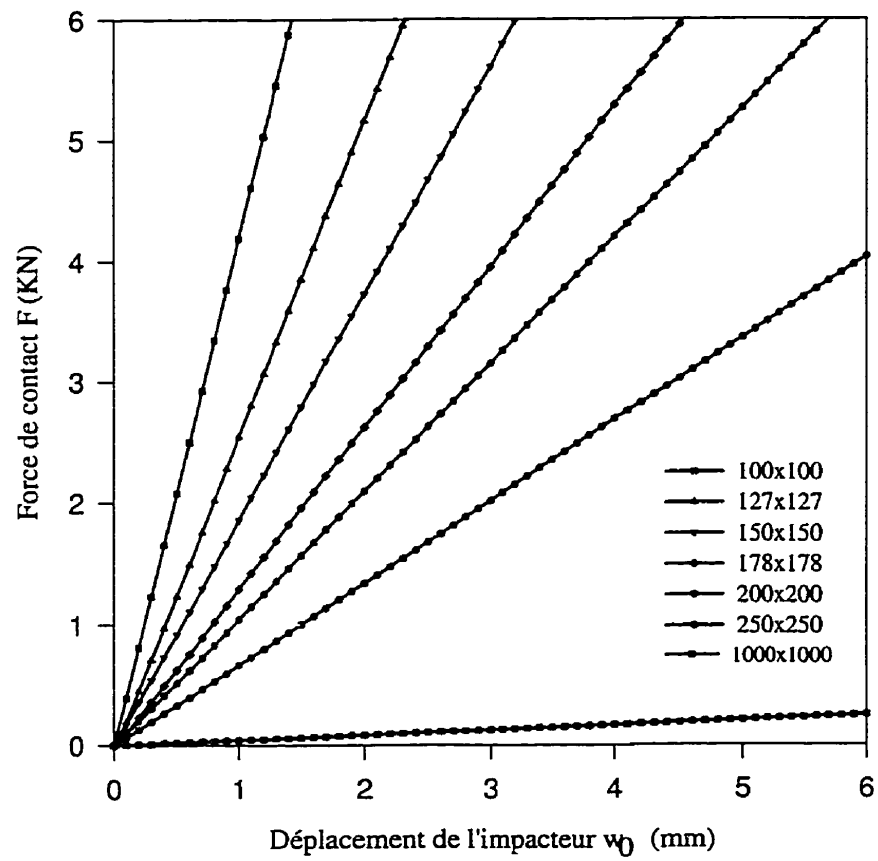


FIG. 5.5: Variation de la force de contact en fonction du déplacement pour différentes dimensions planes.

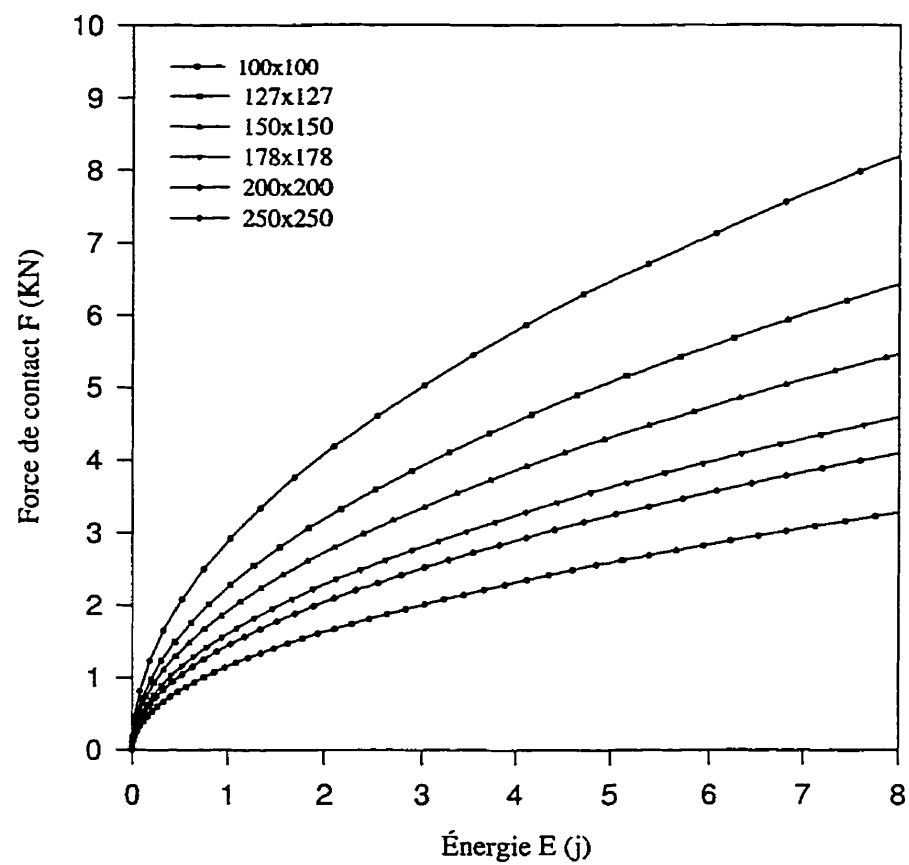


FIG. 5.6: Variation de la force de contact en fonction de l'énergie pour différentes dimensions planes.

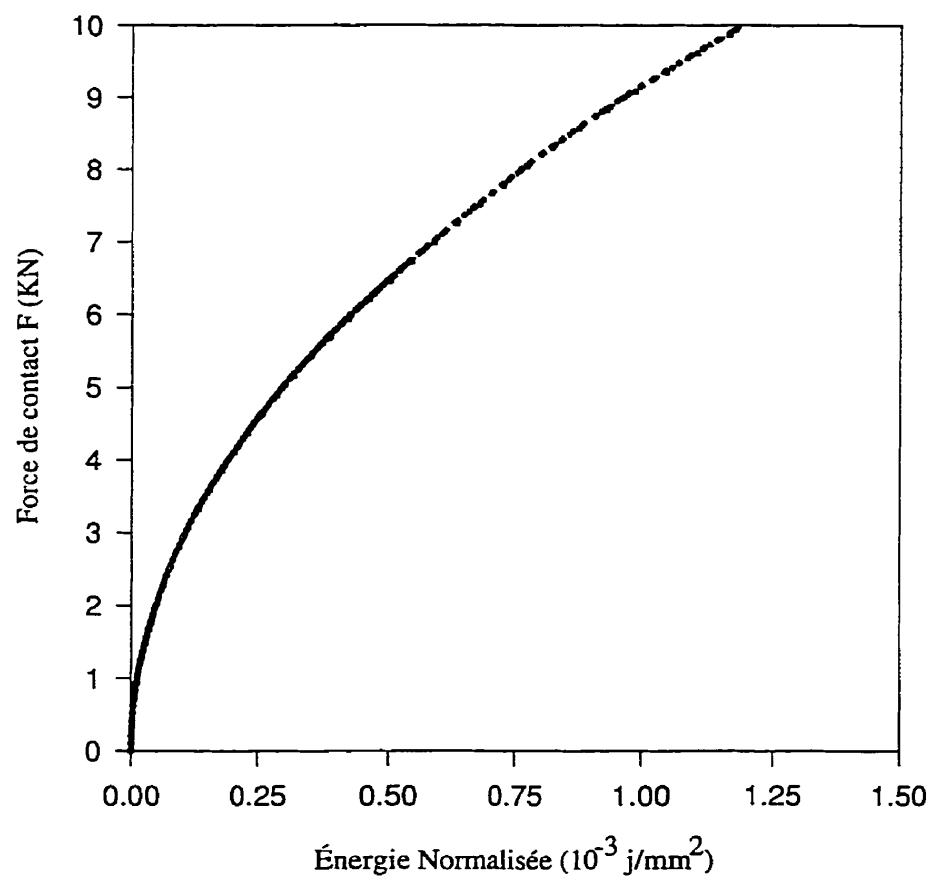


FIG. 5.7: Variation du paramètre $\frac{E}{ab}$ en fonction de la force de contact.

5.2.2 Détermination de la durée du choc

Dans l'hypothèse d'un impacteur rigide soumis à une force de contact en fonction du temps $F(t)$, la loi fondamentale de la dynamique s'écrit comme suit :

$$m\ddot{w} = -F(t) + mg \quad (5.14)$$

où \ddot{w} , m et g sont respectivement l'accélération, la masse de l'impacteur et la constante de la pesanteur. Lors des chocs à faible énergie, les énergies et les vitesses mises en jeu sont relativement faibles. La durée du choc est plus grande que la durée de propagation des ondes depuis le point d'impact jusqu'aux bords de la plaque. Les contraintes et les déformations dans la plaque auront le temps de se stabiliser avant la fin du choc. On peut alors supposer qu'il n'y a pas de perte de contact au premier point de contact entre l'impacteur et la plaque le chargement. Cela implique que le déplacement de l'impacteur est aussi celui du premier point de contact w_0 appartenant à la plaque. D'après le principe de l'action et de la réaction, la force $F(t)$ n'est autre que l'intégration de la pression de contact sur la surface de contact. La relation $(F - w_0)$ déterminée dans les pages précédentes montre bien que le comportement du matériau est linéaire élastique et qu'on peut écrire l'équation suivante :

$$F = K_0 w_0 \quad (5.15)$$

Lorsque la charge est maximale, la vitesse de l'impacteur est nulle et il n'exerce plus aucune force sur la plaque sinon son poids mg . Or les masses utilisées lors des chocs à

faible énergie sont relativement faibles, il en résulte des forces de gravité faibles, (ie : pour $m = 10 \text{ kg}$, $mg = 98.1 \text{ N}$). En introduisant dans l'équation 5.14, l'expression de F donnée par l'équation 5.15 et en négligeant le poids de l'impacteur, on obtient pour cette équation différentielle du deuxième ordre (eq. 5.14), la solution suivante :

$$w_0(t) = w_{0max} \sin(\omega t) \quad (5.16)$$

où w_{0max} est le déplacement maximal du premier point de contact.

La pulsation du mouvement ω est donnée par :

$$\omega = \sqrt{\frac{K_0}{m}} \quad (5.17)$$

Le déplacement maximale w_{0max} est déterminé par la condition initiale suivante :

à $t = 0$, $\dot{w}_0 = v_0$ avec v_0 , la vitesse de l'impacteur juste avant le contact, soit :

$$w_{0max} = v_0 \sqrt{\frac{m}{K_0}} \quad (5.18)$$

Quant à la durée T du choc, elle est déterminée par le fait que la vitesse est nulle à la fin du choc (phase chargement), soit :

$$T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{K_0}} \quad (5.19)$$

À la fin du chargement, la plaque n'est soumise à aucune force, le retour à sa position d'équilibre dépend essentiellement du comportement visqueux du matériau

et du degré des dommages qu'elle a subis. L'équation précédente montre bien que la durée du choc ne dépend que de la masse de l'impacteur et la rigidité K_0 de la plaque. La figure 5.8 illustre la variation de T en fonction de la rigidité K_0 . Dans la figure 5.8 est indiqué le temps prédit pour une plaque de rigidité $K_0 = 5.2 \text{ kN/mm}$ correspondant à celle d'une plaque circulaire de $\phi 50$. Le temps à la force maximale obtenu expérimentalement sur cette même plaque est $T = 1 \text{ ms}$ comme on peut le voir à la figure 5.9. Le temps expérimental correspond à des conditions aux limites d'encastrement, la rigidité est supérieure à celle d'une plaque simplement appuyée. Il s'en suit une durée du choc plus petite dans le cas d'encastrement, évidemment pour les mêmes dimensions planes. L'intérêt du calcul de la durée du choc est que celle-ci peut être mesurée directement ; elle constitue donc un autre moyen de validation.

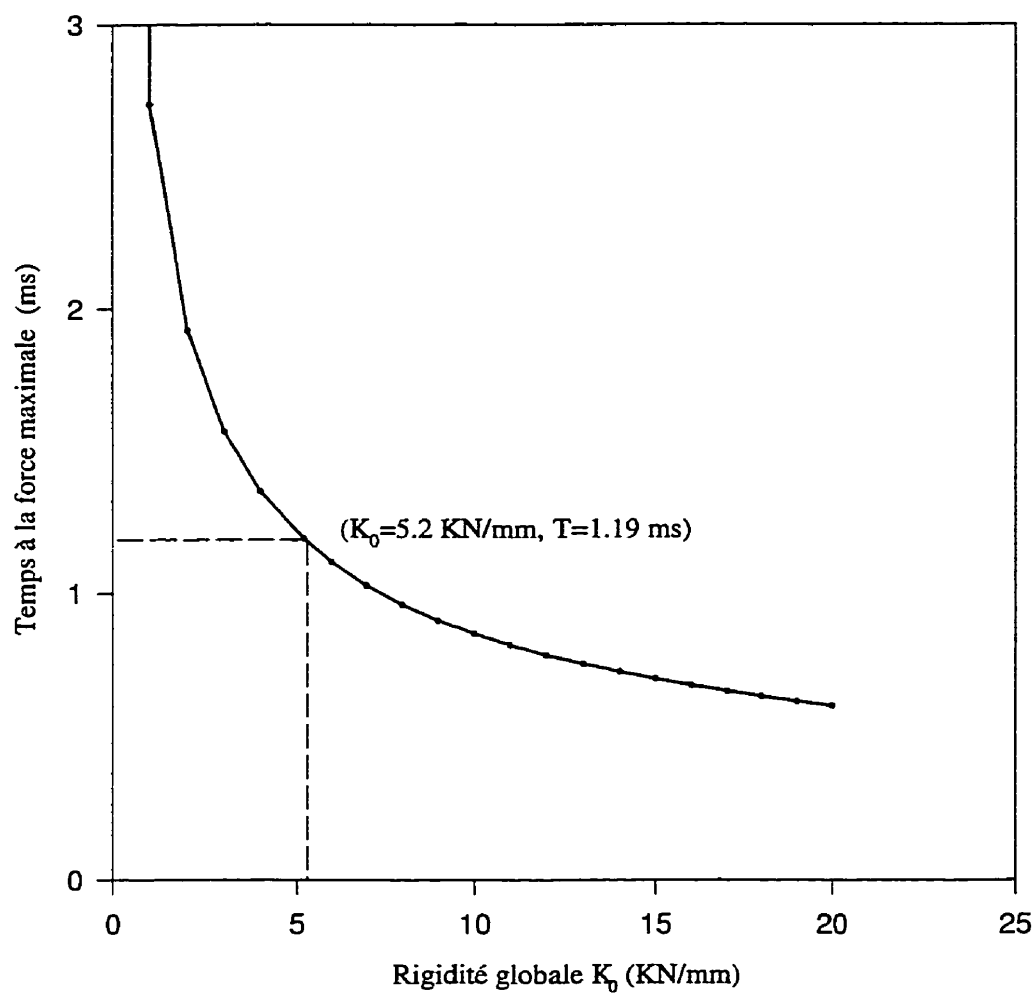


FIG. 5.8: Variation de la durée du choc en fonction de la rigidité de la plaque, ($m = 3Kg$ et $R_{eq} = 12.7mm$).

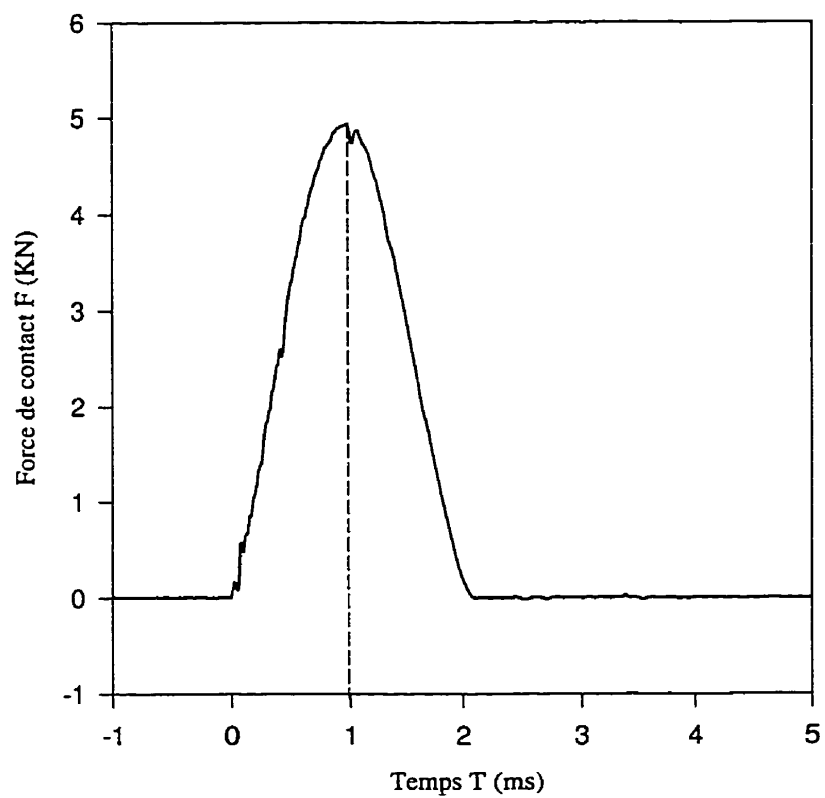


FIG. 5.9: Variation de la force en fonction temps

5.3 Extrapolation au choc répété

Une analyse du comportement au choc répété du stratifié étudié est présenté dans les travaux de Boukhili et al, [43,88]. Dans leur travail, il a été démontré que le nombre de chocs à la rupture (transition I) peut être lié à l'énergie du choc par une relation semblable à celle définissant la courbe de fatigue ($S - N$). La transition I est celle qui correspond à l'état du dommage critique introduit dans la présente étude. La relation ($E - N$) peut être écrite de façon générale comme suit :

$$EN^{\beta_E} = C_E \quad (5.20)$$

où E et N sont l'énergie du choc et le nombre de choc à l'EDC respectivement. β_E et C_E sont des constantes du matériaux et de la géométrie de la plaque déterminées expérimentalement par des essais de chocs répétés. Or, dans les sections précédentes, on a montré que l'énergie du choc peut être liée à la force de contact par la relation suivante :

$$E = \int_0^w F dw = \int_0^F \frac{F}{K_0} dF = \frac{F^2}{2K_0} \quad (5.21)$$

En introduisant cette expression de l'énergie dans l'équation 5.20, on obtient la relation suivante :

$$\frac{F^2}{2K_0} N^{\beta_E} = C_E \quad (5.22)$$

D'où l'on tire la relation entre la force de contact et le nombre de chocs à l'EDC, soit :

$$F N^{\beta_F} = C_F \quad (5.23)$$

où $\beta_F = \frac{\beta_E}{2}$ et $C_F = \sqrt{2K_0} \sqrt{C_E}$. Il s'en suit que la courbe de fatigue sous le choc répété ($E - N$) peut être déduite de celle de la fatigue conventionnelle ($F - N$). La force cyclique correspondante est donnée par la relation suivante :

$$F(t) = F_{max} \sin(\omega t) \quad (5.24)$$

où ω est la pulsation du mouvement définie par l'équation 5.17, (ie : $\omega = \sqrt{\frac{K_0}{m}}$).

F_{max} est l'amplitude du chargement définie par la relation suivante :

$$F_{max} = \sqrt{2K_0} \sqrt{E} = v_0 \sqrt{mK_0} \quad (5.25)$$

Il ne faut pas perdre de vue que même si les deux comportements statique et au choc simple sont identiques, la corrélation entre le choc répété et la fatigue conventionnel doit tenir compte des fréquences des chargements. Lors des chocs à faible énergie, la fréquence est de l'ordre de 1 kHz. En plus, entre deux chocs successifs, il existe une

période de repos où la force est nulle. Or dans un essai dynamique le chargement est continu jusqu'à rupture. Cependant, lors des essais de chocs répétés, aucune variation de la charge maximale n'est observée. On en déduit donc que la rigidité globale de la plaque est pratiquement constante jusqu'à propagation instable du dommage. Par conséquent, pour n'importe quel cycle de chargement dans le temps, celui-ci peut être toujours prédit par le modèle statique. Cependant l'accumulation du dommage peut être différente entre le chargement dynamique continu, (ie : fatigue conventionnelle) et celui du choc répété qui est discontinu.

En réalité, les structures composites sont soumises à des chocs répétés de différent niveau d'énergie et dont l'ordre d'application est aléatoire. Il est donc plus important de pouvoir prédire le nombre de chocs à l'EDC à partir d'un chargement aléatoire ($F - N$) correspondant. Le modèle que nous avons proposé dans un travail antérieur [106], peut être utilisé pour estimer le nombre de choc à l'EDC.

5.4 Variation des paramètres de contact à l'EDC

Les paramètres considérés sont : la pression, la surface, l'indentation et le rayon de l'impacteur. Tous ces paramètres sont calculés pour le matériau AS4/3501-6 testé au chapitre III.

D'abord la figure 5.10 montre la variation de la pression maximale en fonction de la force de contact. On voit clairement que cette pression maximale est indépendante

des dimensions planes de la plaque. La connaissance de cette pression p_0 est utile puisqu'elle est responsable du dommage localisé sous le point d'impact. Des pressions dépassant la pression limite induisent des déformations plastiques voir même des ruptures dans la zone du contact. Si on considère que la pression admissible est de l'ordre de la résistance à la compression transverse d'un pli orthotrope, (ie : $Y^- = 207 \text{ MPa}$). Or à l'EDC, la pression maximale est de l'ordre de $p_0 = 350 \text{ MPa}$, il s'en suit donc un dommage dans la zone du contact. Ce résultat est bien confirmé par des observations directes de la zone du contact.

La variation de la surface du contact en fonction de la force de contact pour différentes dimensions planes est aussi illustrée par la figure 5.11. On voit que cette surface est indépendante des dimensions planes et que sa valeur à l'EDC est de l'ordre de 12 mm^2 , ce qui correspond à une surface circulaire de rayon 1.95 mm . Cela semble un résultat réaliste, car l'observation à l'oeil nu des plaques chargées à l'EDC montre clairement des empreintes de l'impacteur de l'ordre de 1 mm de rayon.

Un autre paramètre important est l'indentation à l'EDC. La figure 5.12 montre la variation de α en fonction de l'énergie d'impact. On voit clairement que pour la même énergie d'impact, l'indentation diminue lorsque les dimensions planes de la plaque augmentent. Ce résultat n'est pas surprenant puisque l'énergie absorbée par flexion est importante lorsque les dimensions de la plaque augmentent. Par contre, l'indentation devient indépendante des dimensions plane si l'énergie normalisée est

utilisée comme on peut le constater à la figure 5.13. L'indentation critique à l'EDC pour ce matériau est de l'ordre de $\alpha_C = 0.3 \text{ mm}$ comme on peut le déduire facilement de la figure 5.14 lorsque la force atteint sa valeur critique $F_C = 5.5 \text{ KN}$.

Le rayon de l'impacteur joue aussi un rôle important dans le problème du contact. La figure 5.15 montre la variation de la pression maximale p_0 pour deux impacteurs de diamètre $D = 12.7 \text{ mm}$ et $D = 19.1 \text{ mm}$. On voit qu'à l'EDC, (ie : $F = F_C$), la pression maximale p_0 est plus faible lorsque le rayon de l'impacteur augmente. Il s'en suit que le matériau sera moins endommagé localement, (ie : au niveau de la surface de contact). Enfin, la figure 5.16 donne la distribution de la pression de contact à l'EDC. On voit que la surface ainsi que la pression de contact présentent des formes qui peuvent être approximées par des fonctions quadratiques. Ceci justifie bien les hypothèses de Hertz.

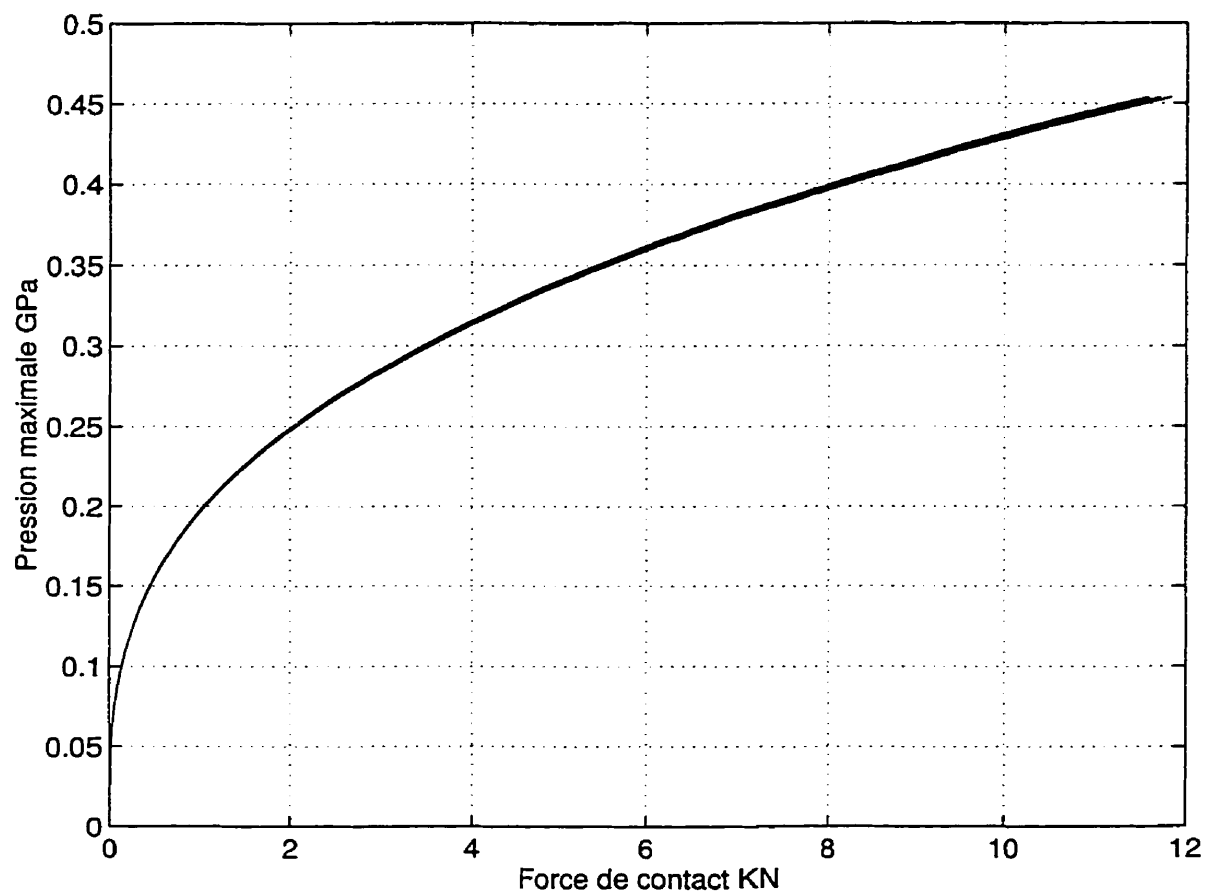


FIG. 5.10: Variation de la pression maximale p_0 en fonction de la force de contact pour différentes dimensions, $D = 12.7$ mm

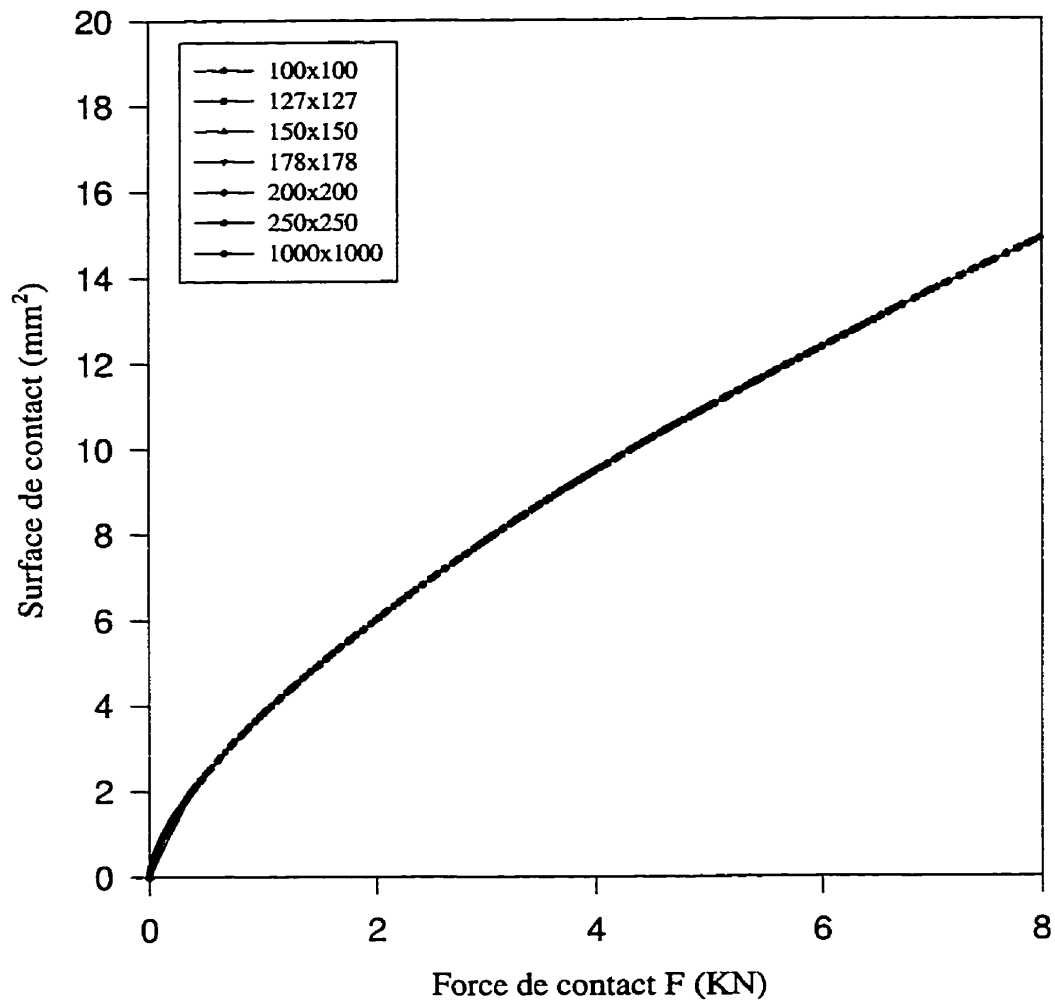


FIG. 5.11: Variation de la surface de contact en fonction de la force de contact, $D = 12.7$ mm

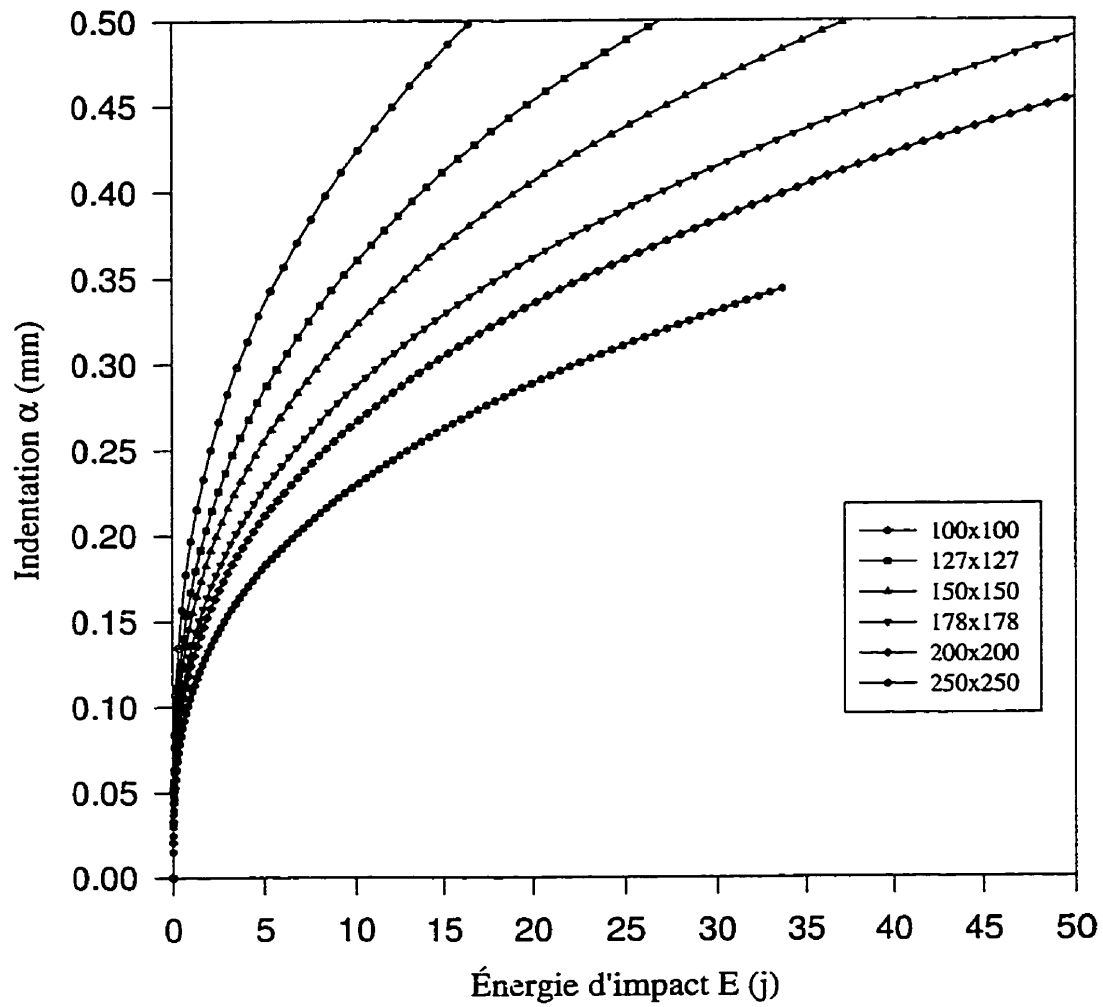


FIG. 5.12: Variation de l'indentation α en fonction de l'énergie de contact E , $D = 12.7$ mm

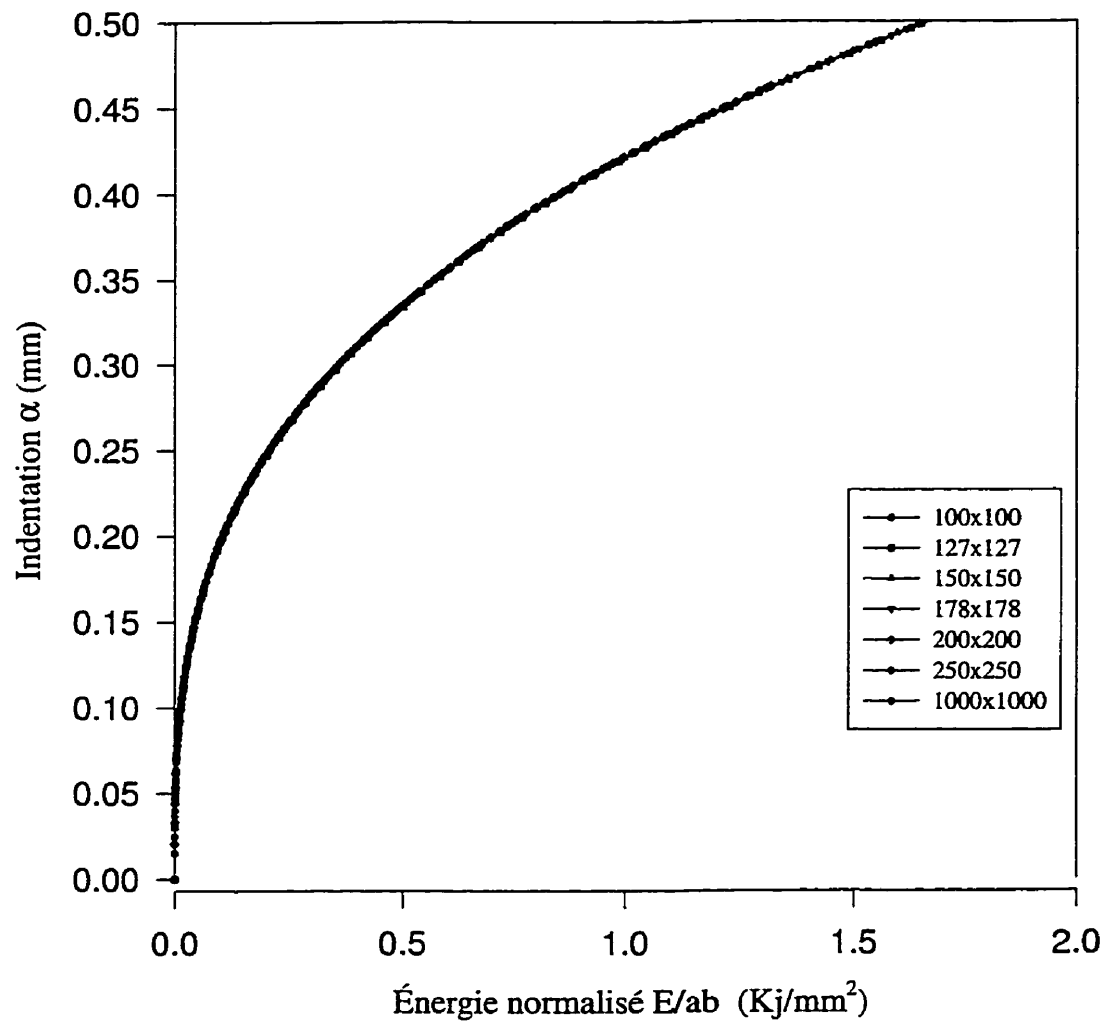


FIG. 5.13: Variation de l'indentation α en fonction l'énergie normalisée E/ab , $D = 12.7$ mm

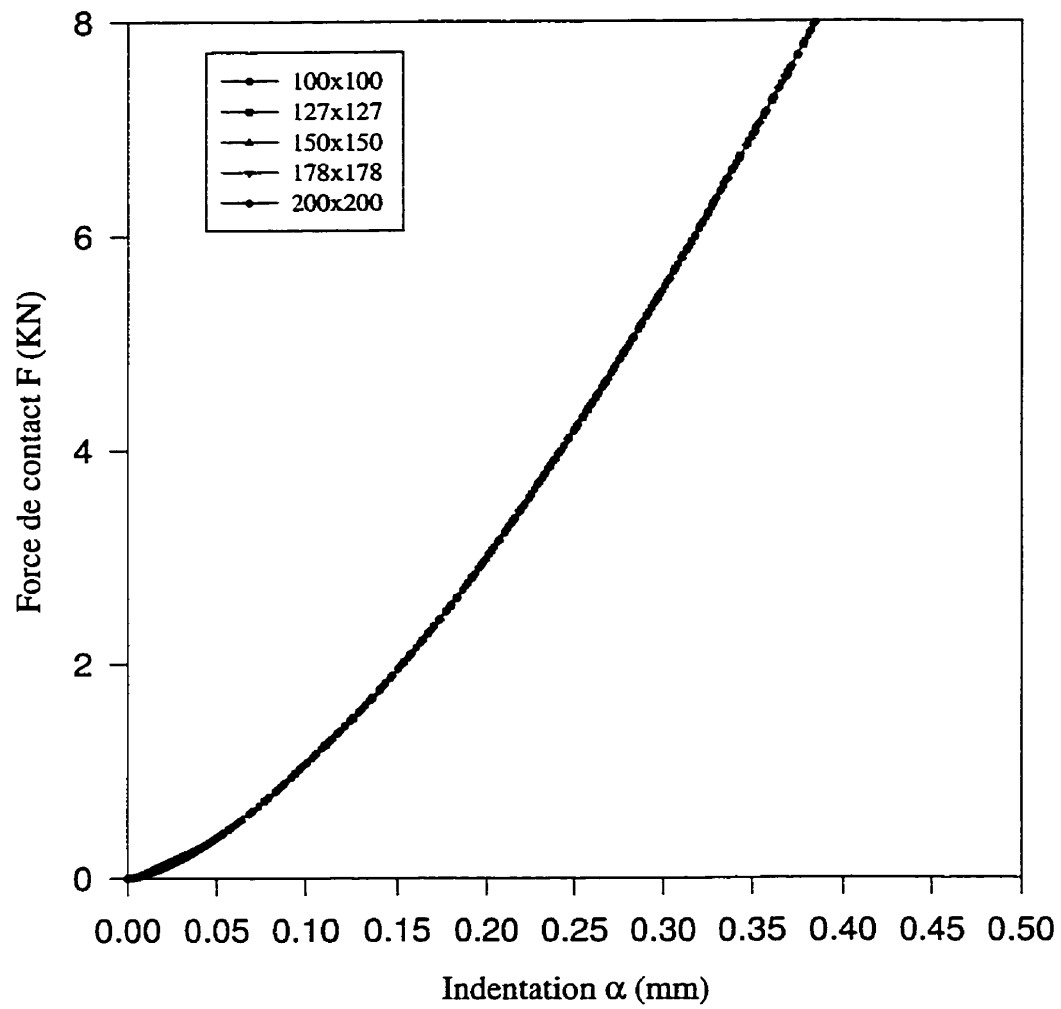


FIG. 5.14: Variation de l'indentation α avec la force de contact F , $D = 12.7$ mm

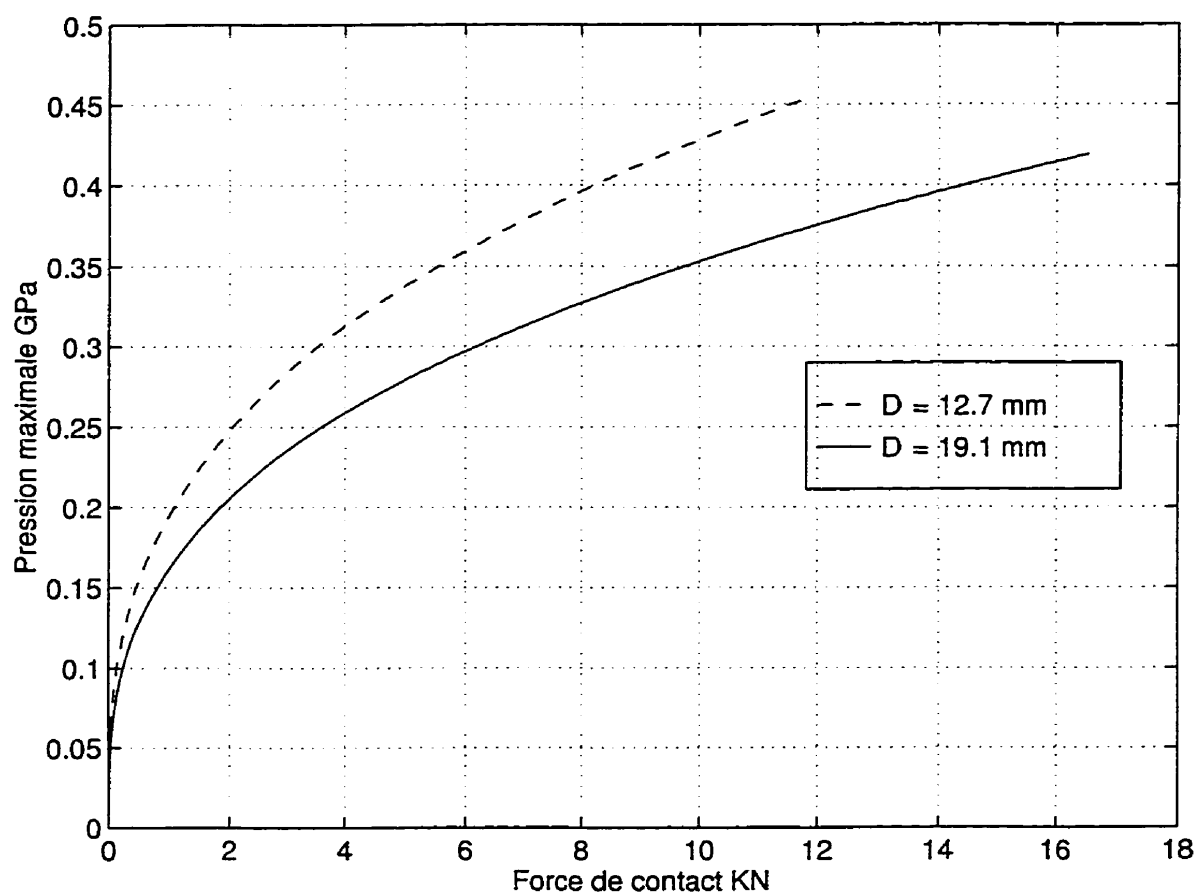


FIG. 5.15: Variation de la pression maximale p_0 en fonction de la force pour deux impacteurs, ($D = 12.7 \text{ mm}$ et $D = 19.1 \text{ mm}$)

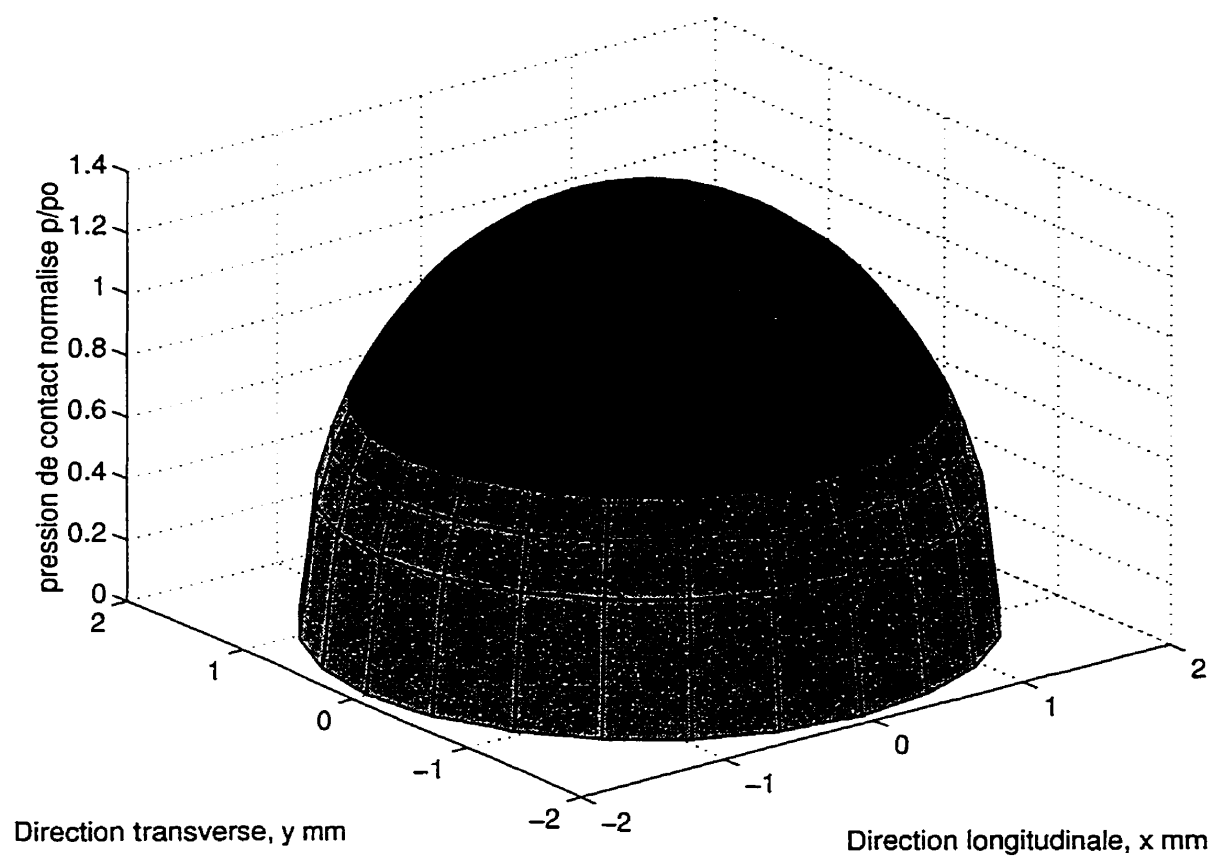


FIG. 5.16: Distribution de la pression de contact normalisée p/p_0 à l'EDC, $p_0 = 350$ MPa, $D = 12.7$ mm

Conclusion

Cette étude a permis de mettre en évidence par des essais expérimentaux, l'existence d'un état de dommage critique EDC. Cet état du dommage est accompagné par une réduction importante dans la force de contact lors des deux types d'essais quasi-statique et dynamique. Une série de tests sur des plaques de différentes dimensions planes et pour deux types de conditions aux limites a montré que la force maximale F_C à cet EDC est constante. L'EDC peut alors être considéré comme un seuil utile au design des structures composites soumises aux chocs à faible énergie.

Des analyses microscopiques de la zone endommagée ont révélé que le dommage a une forme tronconique dont la base est dans le pli inférieur soumis la tension maximale. Quant à sa nature, elle est plutôt un réseau complexe de fissures dans la matrice interconnectées aux délaminages interlaminaires.

Le délaminage est présent uniquement dans les interfaces des plis d'orientations différentes. La résistance au délaminage semble alors dépendre de la séquence locale d'empilement. La comparaison des comportements statique et dynamique a montré

que la réponse au choc peut être déterminée par des essais quasi-statiques. Le temps est sans effet important sur la nature et la forme du dommage à l'EDC.

Un modèle de prédiction de la force (F_C) a été proposé. Ce modèle est basé sur la théorie de l'élasticité anisotrope tenant compte des six contraintes ainsi que des déformations de cisaillement interlaminaire ϵ_{xy} et ϵ_{xz} . La solution est obtenue par construction de la fonction de Green du problème. Les conditions de non interférence entre les surfaces en contact ainsi que la pression de contact qui doit être négative ont été directement intégrées dans la formulation du problème. La méthode numérique du champ de points redondants, (RFP) a été utilisée pour la résolution du système d'équations obtenu. En premier lieu, la variation de la force de contact en fonction de l'indentation est déterminée. Une très bonne concordance entre les prédictions de la présente étude et les résultats expérimentaux a été démontrée. L'effet de certains paramètres sur la relation ($F - \alpha$) est analysé. Il s'est avéré que seuls le rayon de l'impacteur et l'épaisseur de la plaque jouent un rôle important. Pour la même force, l'indentation augmente avec l'épaisseur tandis qu'elle diminue avec le rayon de l'impacteur. Au-delà d'une certaine épaisseur, la réponse de la plaque peut être définie de façon raisonnable par la relation de Hertz modifiée.

Le même modèle a été adapté pour déterminer la force de contact en fonction du déplacement de l'impacteur. Une excellente cohérence est obtenue entre les courbes ($F - w_0$) prédites et celles données par des essais expérimentaux réalisés sur le com-

posite AS4/3501-6.

L'extrapolation au choc afin de déterminer l'énergie critique à l'EDC est donnée par élaboration des relations de passage du cas statique au dynamique. Il a aussi été démontré que le terme EK peut être considéré comme une propriété intrinsèque du matériau. Par conséquent, ce paramètre peut être utilisé pour déterminer l'énergie critique d'une plaque quelconque par la connaissance de $(EK)_{ref}$ d'une éprouvette d'essai.

Nous avons aussi proposé une méthode possible pour prédire la fatigue sous énergie contrôlée à partir des essais de fatigue conventionnelle ($S - N$).

Il est tout de même à noter que ces conclusions sont relatives aux plaques relativement minces (ie : ϵ_z négligé.). Les plaques épaisses peuvent montrer des comportements différents. Il est donc souhaitable de mener des études sur d'autres matériaux et surtout voir l'effet de l'épaisseur sur l'EDC. Pour une meilleure confirmation de l'EDC, il est aussi intéressant de réaliser une série de tests en faisant varier à travers l'épaisseur de la plaque la position d'une interface susceptible au délaminage.

Les essais de fatigue conventionnelle sont aussi souhaitables pour valider les extrapolations proposées aux chocs répétés. Les observations du dommage sont nécessaires afin de comparer les mécanismes du dommage ainsi que l'effet de la fréquence du chargement.

L'analyse des paramètres de contact à l'EDC, (ie : pression maximale, surface de

contact, rayon de l'impacteur, indentation) est aussi présentée. Il s'est avéré que la pression maximale ainsi que la surface de contact sont indépendantes des dimensions planes de la plaque. Par contre, un impacteur de grand rayon induit une pression maximale plus faible, donc la plaque sera moins endommagée localement.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] YANG, S. H. and SUN, C. T. (1983). Indentations Law for Composite Laminates. ASTM STP 787, 425-449.
- [2] LIN, H. J. LIN and LEE, Y. J. (1992). Use of Statical Indentation Law in the Impact Analysis of Composite Laminated Plates and Shells. J. Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 58, 36-52.
- [3] CHAO, C. C., TUNG, T. P. and LEE, S. C. (1987). Response of Orthotropic Cylindrical Shells Subjected to Impact Loading. Int. Conf. on Advanced Comp. Materials and Structures, 602-614.
- [4] LEE, S. M. and ZAHUTA, P. (1991). Instrument Impact and Static Indentation of Composites. J. Composites Mat., 25, 204-222.
- [5] LOVE, A. E. H. (1944). Theory of Elasticity", Dover.
- [7] ZUKAS J. A. (1982). Impact Dynamics. Wiley-Interscience Publication, Jon Wiley & Son, New York, 30-41
- [8] GRESZCZUK, L. B. and CHAO, H. (1977). Impact Damage in Composite Graphite/epoxy. ASTM STP 617, 305-321
- [9] ZUKAS J. A. (1982). Impact Dynamics. Wiley-Interscience Publication, Jon Wiley & Son, New York, 61-67

- [10] WILLIS, J. R. (1966). Hertzian Contact of Anisotropic Bodies. J. Mech. Phys. Solids, 14, 163-176.
- [11] YANG, S. H. and SUN, C. T. (1983). Indentation Law for Composite Laminate. ASTM STP787, 425-449.
- [12] SANKAR, B. V. (. "Smooth Indentation of a Beam by a Rigid Cylinder. Int. J. Solids and Structure, 19, 293-303.
- [13] SINGH, K. P. and BUTON, B. (1974). Numerical Solution of Non-Hertzian Elastic Contact Problem. J. Applied Mechanics, transactions of the ASME, 4, 484-490.
- [15] WU, E. and ShYU, K. (1993). Response of Composite Laminates to Contact Loads and relationship to Low Velocity Impact. J. Composites Mat., 27, 1443-1464
- [16] TAN, T. M. and SUN, C. T. (1985). Use of Statical Indentation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composite Plates. J. Applied Mech., Transactions of the ASME, 52, 6-12.
- [17] WU, E. and YEN, C. S. (1994). The Contact Behavior Between Laminated Composite Plate and a Rigid Sphere. J. Applied Mech., Transactions of the ASME 61, 60-66
- [18] AHMADI, N., KEER, L. M. and MURA, T. (1983) Non Hertzian Contact Stress Analysis for an Elastic Half-Space Normal and Sliding Contact. Int. Journal of Solids and Structure, 19, 357-373.
- [19] CAIRNS, D. S. and LAGACE, P. A. (1987). Thick Composite Plates Subjected to Lateral Loading. J. Applied Mech., Transactions of the ASME, 54, 611-616.

- [20] LEKHNITSKII, S. G. (1963). Theory of Elasticity of Anisotropic Body. Holden-Day, San Francisco, 350-351.
- [21] HANSON, M. T. (1992). The Elastic Field for Conical Indentation Including Sliding Friction for Transverse Isotropy. J. Applied Mech. Transaction of ASME, 59, 123-130.
- [22] FABRIKANT, V. I. (1986). A New Approach to Somme Problems in Potential Theory. J. Applied Mech., Transaction of the ASME, 53, 797-806.
- [23] WU, E. and YEN, C. S. (1994). The Contact Behavior Between Laminated Composite Plates and a Rigid Spheres. J. Applied Mech. Transaction of the ASME, 61, 60-66.
- [24] PAGANO, N. J. (1970). Exact Solution for Rectangular Bi-directional Composites and Sandwich Plates. J. Composites Mat., 4, 20-34.
- [25] SJOBLUM, P. O. and HARTNESS, J. T. `` On the Low Velocity Impact of Composite Materials. J. Composites Mat., 22, 30-52.
- [26] CAPRINO, G., CRIVELLI, V. I. and LIO, A. D. (1984). Elastic Behavior of Composite Structures under Low Velocity Impact. Composites, 15, 231-234.
- [27] ZIENKIEWICZ, O. C. and TAYLOR, R. L. (1990). La méthode des éléments finis: Formulation de base et problèmes lineaires. McGraw-Hill.
- [28] WILLIAM, W. J. and PAUL, R. J. (1987). Structural Dynamics by Finite elements. Prentice-Hall Inc Englewood Cliffs, NJ.

- [29] KUPPUSANY, T. and REDDY, J. N. (1984). A Three Dimensional Nonlinear Analysis of Cross-Ply Rectangular Composite Plates. Comput. Struct., 18, (2), 263-272
- [30] JOSHI, S. P. SUN, C. T. (1985). Impact Induced Fracture in Laminated Composite. J. Composite Mat., 19, 51-66.
- [31] SUN, C. T. and CHEN, J. K. (1985). On the Impact of Initially Stressed Composite Laminates. J. Composite Mat., 19, 490-504.
- [32] WU, HY. T. and SPRINGER, G. S. (1988). Impact Induced Stress, Strains and Delamination in Composite Plates. J. Composites Mat., 22, 533-560.
- [33] WU, H-Y. T. and CHANG, F-K. (1989). Transient Dynamic Analysis of Laminated Composite Plates Subjected to Transverse Impact. Computers and Structures, 31, (3), 453-466
- [34] CHOI, H. Y., WU, H-Y. T. and CHANG, F-K. (1991). A New Approach toward understanding Damage Mechanisms and Mechanic of Laminated Composite Due to Low Velocity Impact: Part I Analysis. J. Composite Mat., 25, 1012-1038.
- [35] CHOI, H. Y., WANG, H. S. and CHANG, F-K. (1992). Effect of Laminate Configuration and Impostor's Mass on the Initial Impact Damage of Graphite/epoxy Composite Plate due to Line Loading Impact. J. Composite Mat., 26, 804-827.
- [36] SCOTT, R. F. and SPRINGER, G. S. (1993). Delamination in Composite Plates under Transverse Static or Impact Loads A model. Composite Structures, 23, 177-190.
- [37] MACHI, D. K. and SINHA, P. K. (1995). Impact Behavior of Thick Laminated Composite Beams. J. Reinforced Plastics and Composite, 14

- [38] LIOU, W. J., TSENG, C. T. and CHAW, L. P. (1996). Stress Analysis of Laminated E-Glass/epoxy Composite Plates Subject to Impact Dynamic Loading. Computers and Structures, 61 (1), 1-11.
- [39] LEE, J. D. (1980). Three Dimensional Finite Element Analysis of Layered Fiber-reinforced Material. Computers and Structures, 12, 319-334.
- [40] LEE, J. D., DU, S. and LEBOWITZ, H. (1984). Three Dimensional Finite Element and Dynamic Analysis of Composite Laminate subject to Impact. Computers and Structures, 91, 807-813
- [41] ROSS, C. A., MALVERN, L., SIERAKWSKI, R. and TAKEDA, N. (1985). Finite Element Analysis of Interlaminar Shear Stress due to Load Impact. ASTM STP 864, 572-601.
- [42] RAMKUMAN, R. and THAKAR, Y. (1994). Dynamic Response of Curved Laminated Plates Subjected to Low Velocity Impact. J. Eng. Mat. and Tech., 116, 121-129.
- [43] BOJJI, C. (1994). Comportement des matériaux composites sous le choc répété. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.
- [44] LIN, H. J. and LEE, Y. J. (1992). Use of Statical Indentation Law in the Impact Analysis of Composite Laminated Plates and Shells. J. Applied Mech. Transaction of the ASME, 58, 36-52.
- [45] TAN, T. M. and SUN, C. T. (1985). Use of Statical Indentation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composite Plates. J. Applied Mech., Transactions of the ASME, 52, 6-12.

- [46] LAKSHMINARAYANA, H. V., BOUKHILI, R. and GAUVIN, R. (1994). Finite Element of Laminated Composite Plates: Predictions and Verification. J. Composite Structures, 28, 61-72.
- [47] LAKSHMINARAYANA, H. V., BOUKHILI, R. and GAUVIN, R. (1994). Finite Element Simulation of Impact Test of Laminated Composite Plates. J. Composite Structures, 28, 47-59.
- [48] ABAQUS: A general purpose finite element code, users manual, version 4-7. Hibit, Karlsson and Sorensen Inc., Providence RI. USA
- [49] GOODMAN, R. E., TAYLOR, R. L. and BREKKE, T. L. (1968). A Model for Mechanics of Jointed Rock. J. Soil. Mech. Found. Div. ASCE, 94, 32-49.
- [50] CHOI, C-K. and CHUNG, G. T. (1996). A Gap Element for Three-dimensional Elastoplastic Contact. J. Computers Structures, 61, (6) 1155-1167
- [51] SCHAFER, H. (1975). A Contribution to the Solution of Contact Problem with the aid of Bound Elements. Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 6, 117-138
- [52] HEUZE, F. E. and BARBOUR, T. G. (1982). New models for Rock Joints and Interfaces. J. Geotechn. Engng Div. ASCE, 108, 44-60.
- [53] BEER, G. (1985). An Isoparametric Joint/Interface Element for Finite Element Analysis. Int. J. Numer. Meth. Engng., 21, 1011-1037.

- [54] J. W SIMONS, J. W. and BERGAN, P. G. (1986). A finite Element Formulation of Three dimensional Contact Problems with Slip and Friction. J. Comput. Meth., 1, 673-698.
- [55] BAI, X. and ZHAO, X. (1988). Analysis of Large Deformation on Elastoplastic Contact through Finite Element Gap Elements. J. Computers Structures, 30, (3), 975-978
- [56] BATHE, K. J. (1982) Finite Element Procedure in Engineering Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [57] HUGHES, J. R. (1988). The finite Element Method-linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [58] BATHE, K. J. (1976). Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [59] KO, S. H. and KWAK, B. M. (1992) Frictional Dynamic Contact Analysis in Deformable Multibody Systems. Finite Element Anal, 12, 256-279
- [60] CHEN, W. H. and YEH, J. T. (1988). A New Finite Element Technique for Dynamic Contact Problems with Friction. J. Theo. Appl. Mech., 7, 89-105.
- [61] BATHE, K. J. and MIJAILOVICH, S. (1988). Finite Element Analysis of Frictional Contact Problems. J. Theo. Appl. Mech., 7, 22-32.
- [62] HUH, G. J. and KWAK, B. M. (1991). Constrained Variational Approach for Analysis of Elastic Contact Problem. Finite Element Anal, 10, 17-37.

- [63] HUGHES, J. R., TAYLOR, R. L., SACKMAN, J. L. and CURNIER, A. (1976). A Finite Element Method for a Class of Contact Impact Problems. Comput. Mech. Appl. Mech. Engng., 8, 543-561.
- [64] CARPENTIER, N. J., TAYLOR, R. L. and M. G. KATONA, M. G. (1991). Lagrange Constraint for Transient Element Surface Contact. Int. J. numer. Meth. engng., 32, 505-710.
- [65] ZEINKIEWICZ, O. C. (1977) The Finite element method. McGraw-Hill, NY.
- [66] ADINA, (1984). A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis. ADINA Engineering, Waseras, Sweden.
- [67] CHAUDHARY, A. B. and BATHE, K. J. (1986). A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three Dimensional Contact Problems with Friction. J. Computers Structures, 24, (6), 855-873.
- [68] WRIGGERS, P., VAN, V. and STEIN, E. (1990). Finite Element Formulation of Large Deformation for Impact-Contact Problems with Friction. J. Computers Structures, 37, 1124-1147.
- [69] BARTHOLD, F. J. and BISCHOFF, D. (1988). Generalization of Newton Type Method to Contact Problems with Friction. J. Theo. appl. Mech., 7, 754-772.
- [70] ODEN, J. T. (1981) Exterior Penalty Methods for Contact Problems in Elasticity. in Nonlinear Element Analysis in Structural Mechanics. Ed by W. Wunderlich, E. Stein and Bathe. Sproger, NY.

- [71] KIKUCHI, N. (1982). A Smoothing Technique for Reduced Integration Penalty Method in Contact Problems. Int. J. Numer. Mech. Engng, 18, 606-629.
- [72] GIVOLI, G. and DOUKHOVNI, T. (1996). Finite Element Approach for Contact Problem with Geometrical Nonlinearity. J. Computer Structures, 61, (6), 1252-1275.
- [73] WRIGGERS, P. and SIMONS, J. C. (1986). Penalty and Augmented Lagrangian Formulation for Contact Problem. Int. Conf on Numerical Method in Engineering, Ed. by J. Middleton and G. N. Pande. 856-871.
- [74] ZONG, Z. H. (1993). Finite Element Procedure for Contact Impact Problems. Oxford Science Publication
- [75] CONRY, T. F. and SEIREG, A. (1971). A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact. J. Appl. Mech. Transactions of the ASME, 38, 78-99.
- [76] HUNG, N. D. and SAXCE, G. (1980). Frictionales Contact of Elastic Bodies by Finite Element Method and Mathematical Programming Technique. J. Computers Structures, 11, (4), 264-275.
- [77] GIVOLI, D. and DOUKHOUN, I. (1996). Finite Element-Quadratic Programming Approach for Contact Problems with Geometrical Nonlinearity. J. Computers Structures, 16, (1), 31-41.
- [78] GASEMI, M. N. and MAJIDI, A. P. (1990). Impact Behavior and Damage Tolerance of Woven Carbon Fiber Reinforced Thermoplastics Composites. Composites, 12, 419-429.

- [79] PREVORSEK, D. C., CHIN, H. B. and BHATNGAR, A. (1993). Damage Tolerance: Design for Structural Integrity and Penetration. J. Composite Structures, 23, 195-212.
- [80] LAGACE, P. A., WILLIAMSON, J. E. and P. H. WILSON P. H. (1993). A Preliminary Proposition for a Test Method to Measure Impact Damage Resistance. J. Reinforced Plastics and Composites, 12, 172-189.
- [81] CHESTER, R. J. and CLARK, J. L. (1992). Modeling of Impact Damage Features in Graphite/epoxy Laminates: Damage Detection in Composite Material. ASTM STP 1128, 1543-1562.
- [82] HONG, S. and LIU, D. (1997). On the Relationship Between Impact Energy and Delamination Area. J. Experimental Mech., 37, 126-131.
- [83] SCOTT, R. F., HE, Y. F. and SPRINGER, G. S. (1984). Delamination in Composite Plates under Transverse Impact Load: Experimental Results. J. Composites Structures, 23, 191-204.
- [84] RYDIN, R. W., BUSHMAN, M. B. and KARBHARI, B. M. (1995). The Influence of Velocity in Low-velocity Impact Testing of Composites using the Drop Weight Impact Tower. J. Reinforced Plastics and Composites, 14, 255-279.
- [85] KUMAR, P. and RAI, B. (1990). Delamination of Barely Visible Impact Damage in CFRP Laminates. J. Composite Structures, 10, 154-173.
- [86] CHANG, F-K., CHOI, H. Y. and YENG, S. T. (1990). Study on Impact Damage in Laminated Composites. J. Mech. Mat., 10, 253-270.

- [87] SIRKIS, J. S., CHANG, C. C. and SMITH, B. T. (1994). Low Velocity Impact of Optical Fiber Embedded Laminated Graphite/epoxy Panels. Part I: Macro-Scale. J. Composite Mat., 28, 1312-1335.
- [88] BOUKHILI, R., BOJJI, C. and GAUVIN, R. (1994). Fatigue Mechanism Under Low Energy Repeated Impact of Composite Laminates. J. Reinforced Plastics and Composite, 13, 856-870.
- [89] WANG, H. and VUKHAN, T. (1995) Fracture Mechanics and Mechanisms of Impact Induced Delamination in Composite Laminate, J. Composite Mat., 29, 132-145.
- [90] SRAIT, L. H., KARASEK, ML. and AMATEAU, F. (1992). Effects of Stacking Sequence on the Impact Resistance of Carbon Fiber Reinforced Thermoplastic Thounned Epoxy Laminate. J. Composite Mat., 26 (12), 1725-1740.
- [91] CHOI, H. Y. and CHANG, F. K. (1992). A Model for Predicting Damage in Graphite/epoxy Laminated Composite Resulting from Low-velocity Point Impact. J. Composite Mat., 26, 1432-1459.
- [92] SHIVAKUMAR, K. N., ELBERT, W. and ILIG, W. (1997). Prediction of Low-velocity Impact Damage in Thin Circular Laminates. AIAA Journal, 35, 389-396.
- [93] HONG, C. S., CHOI, I. H. and KIM, C. G. (1993). Estimation of Damage Area to Low Velocity Impact in Composite Laminates. Proceeding of the American Society for Composites, 9th technical conference, 1643-1654.
- [94] ABRATE, S. (1991). Impact on Laminated Composite Materials. J. Applied Mechanics, Transactions of ASME, 44 (4), 155-190

- [95] ABRATE, S. (1994). Impact on Laminated Composite: Recent advances. J. Applied Mechanics, Transaction of ASME, 47 (11), 517-544
- [96] ECHAABI, J. and TROCHU, F. (1996). A Methodology to drive the Implicit Equation of Failure Criteria for Fibrous Composite Material. J. Composite Mat., 30 (10), 1088-1127
- [97] LIU, S., KUTLU, Z. and CHANG, F-K. (1993). Matrix Cracking and Delamination Propagation in Laminated Composites Subjected to Transversely Concentrated Loading. J. Composite Mat., 27, (5), 436-470.
- [98] LIU, S., KUTLU, Z. and CHANG, F-K. (1993). Matrix Cracking induced Stable and Unstable Delamination Propagation in Graphite/epoxy Laminated Composites due to Transversely Concentrated Load. ASTM STP 1156, 86-101.
- [99]. WHITNEY, J. M. (1987). Structural Analysis of Laminate Anisotropic Plates., Technomic.
- [100] AMBARTSUMYAN, S. A. (1991). Theory of Anisotropic Plates, Strength, Stability and Vibration. Hemisphere Publishing Corporation, 37-38.
- [101] SINGH, K. P. and BUTON, B. (1974). Numerical Solution of Non-Hertzian Elastic Contact Problem. J. Applied Mechanics, Transaction of the ASME, 4, 484-490.
- [102] AHMADI, N., KEER, L. M. and MURA, T. (1983). Non Hertzian Contact Stress Analysis for an Elastic Half-Space Normal and Sliding Contact. Int. Journal of Solids Structure, 19, 357-373.

- [103] LAWNSON, C. L. and HANSON, R. J. (1974). Solving Least Squares Problems. Englewood Cliffs, N.J.
- [104] ABOUSSALEH, M. and BOUKHILI, R. The Contact Behavior Between Laminated Composites and Rigid Impactors. J. Composite Structures, en presse.
- [105] MARTIN, S. (1994). Mécanismes d'endommagement des matériaux composites soumis à un choc répété et influence de l'humidité. Mémoire de maîtrise, M.Sc.A, École Polytechnique de Montréal.
- [106] ABOUSSALEH, M. and BOUKHILI, R. (1998). Life Prediction for Composite Laminates Submitted to Service Loading Spectra. Polymer Composites, 19, (3), 241-245.